(2015年度)

2 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る**。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は，符号欄にマークしない。）

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄とも z にマークせよ。（符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。）

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に −26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の2つの式を満たしている。ただし, a は定数とする。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^x f(t)dt = xg(x) - 2ax + 2 \\ \displaystyle g(x) = x^2 - x\int_0^1 f(t)dt - 3 \end{cases}$$

このとき, $a = \boxed{ア}$ であり,

$$f(x) = \boxed{イ}\, x^2 + \boxed{ウ}\, x + \boxed{エ}$$

である。

(2) $c(n) = \dfrac{3n^2 + 174n + 231}{n^2 + 3n + 2}$ とおく。$c(n)$ が整数となるような自然数 n は $\boxed{オ}$ 個存在する。また, これら $\boxed{オ}$ 個の自然数のうちで最も大きいものを n^* と表すと, $n^* = \boxed{カ}$, $c(n^*) = \boxed{キ}$ である。

2 座標平面上の点 $(\alpha, 1)$ $(\alpha > 0)$ を中心とする円 C と放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ が共に点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ で直線 ℓ と接している。

(1) α を t の式で表すと

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}t^3$$

である。

以下では, C が x 軸と接する場合を考える。C と x 軸の接点を H とする。

(2) $\alpha = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) ℓ の方程式は

$$y = \sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,x + \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(4) C の弧 PH のうちの短い方と放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ および x 軸とで囲まれる図形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\pi$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ t を実数とする。座標平面上に, 2 点 $\mathrm{A}(t,0)$, $\mathrm{B}\left(0,1-\sqrt{3}t\right)$ と, 原点を中心とする半径 1 の円 C がある。点 P が円 C 上を動くときの 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の内積の最大値を M_t とおき, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=M_t$ となる点 P を P_t と表す。

(1) $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき,

$$M_t=\boxed{\text{ナ}}+\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}$$

であり, P_t の座標は $\left(\boxed{\text{ヌ}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$ である。

(2) 実数 t が $t\geqq 0$ の範囲を動くとき, M_t は $t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ をとる。

(3) P_t の座標を $(\cos\theta,\sin\theta)$ (ただし, $0\leqq\theta<2\pi$) と表す。実数 t が $t\geqq 0$ の範囲を動くとき, θ は

$$\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\pi<\theta\leqq\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}\pi$$

の範囲を動く。