(2015年度)

1 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は，符号欄にマークしない。）

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともｚにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。）

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に －26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

$\boxed{1}$ (1) 関数 $f(x) = \left||x^2 - 3| - 1\right|$ $(x \geqq 0)$ を考える。

(i) $f(x) = 0$ となるのは $x = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ または $x = \boxed{\text{イ}}$ のときである。ただし，$\sqrt{\boxed{\text{ア}}} < \boxed{\text{イ}}$ とする。

(ii) 関数 $f(x)$ は区間 $\sqrt{\boxed{\text{ア}}} \leqq x \leqq \boxed{\text{イ}}$ において，$x = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ で極大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(iii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{8} f(x)\,dx = \boxed{\text{オ}} + \sqrt{\boxed{\text{カ}}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$

である。

(2) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = 2^{3x+2} - 3\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+\frac{1}{2}}$$

で定める。$g(x)$ は，

$$x = \boxed{\text{コ}} \quad \text{で極大値} \quad \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}},$$

$$x = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \quad \text{で極小値} \quad \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

をとる。

$\boxed{2}$ Nを2以上の整数とする。整数a, bに対し, 演算$\oplus$を

$$a \oplus b = \Big((a+b)\text{を}N\text{で割ったときの余り}\Big)$$

と定める。例えば, $N=2$のとき,

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0, \quad 1 \oplus 3 = 0$$

である。

(1) 次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n \oplus (n+1) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(i) $N=4$のとき, $a_3 = \boxed{\text{ヌ}}$である。

(ii) $N \geqq 4$とする。

Nが偶数のとき, $a_{N+1} = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}N + \boxed{\text{ハ}}$,

Nが奇数のとき, $a_{N+1} = \boxed{\text{ヒ}}$である。

(iii) Nが偶数のとき, $a_{N-1} = \dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}N + \boxed{\text{ホ}}$,

Nが奇数のとき, $a_{N-1} = \boxed{\text{マ}}$である。

(2) N を偶数とし，$N = 2M$ と表す。ただし，M は自然数である。
次の条件によって定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n \oplus (2n+1) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，$b_M = 0$ となる必要十分条件は，N が $\boxed{\text{ミ}}$ の倍数となることである。N が $\boxed{\text{ミ}}$ の倍数でない偶数のとき，

$$b_M = \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}} N \text{ である。}$$

3 aを実数とするとき, 座標平面において, 円 C : $x^2+y^2=20$ および 円 C_a : $x^2+y^2+a(x+3y-10)=20$ を考える。

(1) どのようなaの値に対しても, C_aは2点$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ユ}}, \boxed{\text{ヨ}}\right)$を必ず通る。ただし, $\boxed{\text{モ}} < \boxed{\text{ユ}}$とする。

(2) C_aの中心の座標は$\left(\dfrac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}a, \dfrac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}a\right)$であり, C_aの半径を

rとすると, $r^2=\dfrac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}}\left(a^2+\boxed{\text{ヲ}}\,a+\boxed{\text{ン}}\right)$である。

(3) C_aの半径rが最小となるのは, $a=\boxed{\text{あ}}$のときである。

(4) Cの周および内部の領域をD, C_aの周および内部の領域をD_aとする。$a=\boxed{\text{あ}}$のときDとD_aの共通部分の面積は

$\boxed{\text{い}}\,\pi+\boxed{\text{う}}$である。

(5) x座標とy座標がともに整数の点を格子点とよぶ。DとD_aの共通部分に含まれる格子点の数を$n(a)$で表す。

(i) $a=-4$のとき, $n(a)=\boxed{\text{え}}$である。

(ii) $n(a)$が最小値$\boxed{\text{お}}$をとるための必要十分条件は,

$a<\boxed{\text{か}}$である。

(iii) $12 \leqq n(a) < 14$となる必要十分条件は,

$\boxed{\text{き}} \leqq a < \boxed{\text{く}}$である。