(2014年度)

7　数　学　問　題　(90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7, $\boxed{イ}$ に－26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) 初項と公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ があり，初項 a_1 は整数で，$a_1 + a_4 = 18$ であるとする。

(i) $\{a_n\}$ の公比が整数であるとき，$\{a_n\}$ の初項となり得る数のうち最小のものは $\boxed{ア}$ である。

(ii) $\{a_n\}$ からつくられた無限等比級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

が収束し，かつ公比が有理数であるとき，$a_1 = \boxed{イ}$ であり，この無限等比級数の和は $\boxed{ウ}$ である。

(2) 定義域が実数全体であり値が実数である関数 $f(x)$ に関する命題

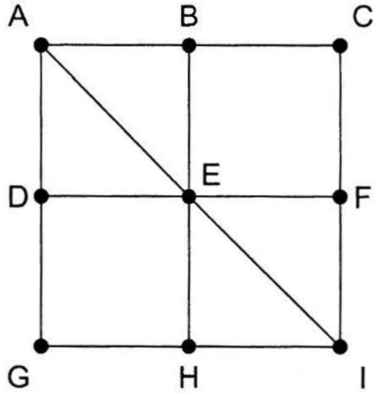
$$\text{P}: \quad x \geqq 3 \text{ ならば } f(x) < 2 \text{ である}$$

を考える。P の否定となっている命題を選択肢から 2 つ選べ。(解答欄 $\boxed{あ}$ に 2 つマークせよ。)

選択肢：

(a) $x < 3$ ならば $f(x) \geqq 2$ である。
(b) $x \geqq 3$ ならば $f(x) \geqq 2$ である。
(c) $f(x) \geqq 2$ ならば $x < 3$ である。
(d) $f(x) \geqq 2$ となる $x \geqq 3$ が存在する。
(e) $f(x) < 2$ となる $x < 3$ が存在する。
(f) $f(x) < 2$ となる $x \geqq 3$ が存在する。
(g) $f(x) < 2$ ならば $x \geqq 3$ である。
(h) $y \geqq 3$ かつ $f(y) \geqq 2$ を満たす実数 y が存在する。

(3) 下図において，9つの点 A～I のどれか1つから出発し一筆書きで2つの線分をたどって3つの異なる点を結ぶ方法を考える。ただし，同じ3点を通るが出発点の異なる結び方は互いに区別するものとする。



(i) A を出発点とする方法は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。

(ii) E を出発点とする方法は $\boxed{\text{オ}}$ 通りある。

(iii) 9つの点 A～I のどれか1つから出発する方法は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りある。

2 xyz 空間において，xy 平面に原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ で接し，中心が $\mathrm{C}(0,0,1)$ であるような球面を S とする。点 $\mathrm{P}(2\sqrt{3},0,3)$ に点光源をおくとき，xy 平面上にできる S の影 S' を考える。

(1) 点 P から球面 S に引いた接線の一つと球面との接点を A とする。線分 PA の長さは $\sqrt{\boxed{キ}}$ である。$\angle\mathrm{CPA}=\theta$ とすると，

$$\sin\theta=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$ である。

(2) 球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は，

$\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}},\ \boxed{シ},\ \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\right)$ を中心とし，半径が $\dfrac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ の円である。

(3) 影 S' は長軸の長さが $\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$ の楕円の内部である。

3 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x^3-3x^2-9x+3)$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ は, $x=$ $\boxed{\text{テ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ト}}$ をとり,

$x=$ $\boxed{\text{ナ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ニ}}$ をとる。

(2) $y=f(x)$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式は,

$$y=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}x+\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$ である。

(3) 実数からなる集合

$$A=\{x\,|\,f(x)>0\},\qquad B=\{x\,|\,x\geqq b\}$$

を考える。ただし, b は整数とする。

(i) $A\subset B$ となる最大の整数 b は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

(ii) $B\subset A$ となる最小の整数 b は $\boxed{\text{フ}}$ である。

(iii) $b\in A$ であり, $B\subset A$ とならない整数 b は $\boxed{\text{ヘ}}$ 個ある。

4 (1) $\displaystyle\int_0^u te^{-t}dt = \boxed{\text{ホ}}\,ue^{-u} + \boxed{\text{マ}}\,e^{-u} + \boxed{\text{ミ}}$ であり，これより

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u te^{-t}dt = \boxed{\text{ム}}$$

である。

(2) 定義域が実数全体であり値が実数である連続関数 $f(x)$ と正の定数 a が次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たしているとする。

(i) 任意の実数 x に対して

$$\int_0^2 (3x+t)e^{t-x}\,f(t)\,dt = a\,f(x)$$

が成り立つ。

(ii) $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\int_0^u f(t)\,dt = 1$ が成り立つ。

このとき $a = \boxed{\text{メ}} + \boxed{\text{モ}}\sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}$ であり，また

$$f(x) = (3Ax+B)e^{kx}$$

ただし，$A = \boxed{\text{ユ}} + \boxed{\text{ヨ}}\sqrt{\boxed{\text{ラ}}}$

$B = \boxed{\text{リ}} + \boxed{\text{ル}}\sqrt{\boxed{\text{レ}}}$

$k = \boxed{\text{ロ}}$

である。