

(2014年度)

6 数学問題 (60分)

(この問題冊子は7ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し、所定の欄に氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机の上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき、マーク欄からはみ出したり、白い部分を残したり、文字や番号、○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は、消しゴムでいねいに消すこと。消しきらずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ-にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表示するときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、-にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位										1 の 位											
ア	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
イ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\frac{\square-3}{\square 2}$ とする。

0 を、 $\frac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\frac{\square 0}{\square 1}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\square}{\square} \sqrt{\square}$ にあてはめる場合 $\frac{\square-1}{\square 2} \sqrt{\square 3}$ とする。

$-x^2+x$ を、 $\square x^2 + \square x + \square$ にあてはめる場合

$\square-1 x^2 + \square 1 x + \square 0$ とする。

- 1 (1) 3^{2014} は $\boxed{\text{ア}}$ 桁の数であり、最も大きい位の数字は $\boxed{\text{イ}}$ 、
一の位の数字は $\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし、

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \quad \log_{10} 3 = 0.4771, \quad \log_{10} 7 = 0.8451$$

とする。

- (2) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leq -2x^2 - 8x - 3 \\ y \geq |3x + 6| \end{cases}$$

で表される座標平面上の領域を D とする。

- (i) D の面積は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

- (ii) 点 (x, y) が D を動くとする。

- (a) $4x + y$ の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

- (b) $x^2 + 4x + y$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ 、最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

- 2 座標空間の原点 O を通りベクトル $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ に平行な直線を ℓ とし、点 A の座標を $(\sqrt{3}+3, 3\sqrt{3}+3, 6-2\sqrt{3})$ とする。このとき、 O を頂点とする円錐 C は、底面の中心 H が ℓ 上にあり、底面の円周が A を通るとする。

(1) $\angle AOH = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である。ただし、 $0 \leq \angle AOH < \pi$ とする。

- (2) H の座標は

$$\left(\sqrt{\boxed{\text{シ}}}, \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}} \right)$$

である。

- (3) 点 $(\sqrt{3}, y, z)$ が C の底面上 (境界を含む) にあるとき、常に

$$y + \boxed{\text{ソ}}z + \boxed{\text{タ}} = 0$$

が成り立つ。

- (4) 点 $(\sqrt{3}, y, z)$ が C の側面上 (境界を含む) にあるとき、常に

$$\boxed{\text{チ}}y^2 + \boxed{\text{ツ}}yz + \boxed{\text{テ}}z^2 + \boxed{\text{ト}}y + \boxed{\text{ナ}}z + 21 = 0$$

が成り立つ。また、このときの z の最大値は

$$\boxed{\text{ニ}} + \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

3

1 から 10 までの数字を 1 つずつ書いた 10 枚のカードを数字の小さい順に左から右に並べる。この中から 3 枚を無作為に選び、いずれのカードも元の位置と異なる位置に置くという操作を考える。この操作を 2 回以上続けて行う場合、2 回目以降はカードの並びを一番最初の状態に戻すことはせず、1 回前の操作で置き換えられた状態から 3 枚を無作為に選ぶ。また、選んだ 3 枚のカードについて元の位置と異なる位置への置き方が複数あるとき、いずれの置き方も等しい確率で選ばれるものとする。置き換えの操作を n 回続けて行ったとき、一番左のカードが 10 である確率を P_n で表す。

$$(1) P_1 = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \text{ である。}$$

(2) n 回の操作の後で一番左のカードが 10 であり、 $(n+1)$ 回目の操作の後も一番左のカードが 10 となる確率を P_n の式で表すと

$$\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} P_n \text{ となる。}$$

(3) n 回の操作の後で一番左のカードが 10 ではなく、 $(n+1)$ 回目の操作の後で一番左のカードが 10 となる確率を P_n の式で表すと

$$\frac{\boxed{\text{ホ}} P_n + \boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}} \text{ となる。}$$

(4) P_{n+1} を P_n の式で表すと

$$P_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}} P_n + \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$$

となる。

$$(5) P_n = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ユ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ヨ} \\ \hline \end{array}} \left(\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ラ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{リ} \\ \hline \end{array}} \right)^n + \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ル} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{レ} \\ \hline \end{array}} \text{である。}$$