（2013年度）

7　数　学　問　題（90分）

（この問題冊子は７ページ，４問である。）

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7, $\boxed{イ}$ に－26をマークする場合。

	符号	10の位											1の位										
	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

以下の問題すべてを通して, π は円周率を表す。

1 (1) 次の行列が表す xy 平面上の1次変換を, 下の選択肢から選べ。

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\boxed{あ}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は $\boxed{い}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ は $\boxed{う}$

である。

$\boxed{あ}$, $\boxed{い}$, $\boxed{う}$ の選択肢：

(a) 原点に関する対称移動　(b) 恒等変換

(c) x 軸に関する対称移動　(d) y 軸に関する対称移動

(e) 直線 $y = x$ に関する対称移動

(f) 直線 $y = -x$ に関する対称移動

(g) 直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動

(h) 原点のまわりの 30° の回転移動

(i) 原点を中心として $\sqrt{3}$ 倍に拡大する移動

(j) 点 $(1,1)$ のまわりの 30° の回転移動

(k) 直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動

(ℓ) 原点のまわりの 60° の回転移動

xy 平面上の原点Oと異なる点Pを, 上記選択肢 (c) の1次変換で移し, さらに選択肢 (h) の1次変換で移した点Qは, 直線OP上にあった。

このとき, OQの長さはOPの長さの $\boxed{ア}$ 倍になる。

また, 点Pは2本の直線

$$y = \left(\pm \boxed{イ} - \sqrt{\boxed{ウ}}\right) x$$

のいずれかの上にある。

(2) 池の周りに, 池を囲むように 8 本の木が植えられている。これらの木の間に, 全部で 3 本のチューリップを植える。ただし, 木はそれぞれ見分けがつくものとする。チューリップは, 異なる色のものは見分けることができ, 同じ色のものは見分けられないものとする。それぞれの木の間にはチューリップを複数本植えてよく, その順番や配置などは区別しないものとする。

このとき,

(i) 赤, 黄, 白のチューリップを 1 本ずつ植える方法は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。

(ii) 赤いチューリップを 2 本, 黄色いチューリップを 1 本植える方法は $\boxed{\text{オ}}$ 通りある。

(iii) 赤いチューリップを 3 本植える方法は $\boxed{\text{カ}}$ 通りある。

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 平面上の点 $\mathrm{A}(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ を中心とする半径 4 の円を R とする。糸の一方の端点を原点 O に固定し, 糸をたるみのない状態で円 R に下側から 1 点で接するように張ったとき, O と反対側の糸の端点を P とする。糸と円 R との接点を B とするとき, BP の長さが 4π であった。

(1) $\mathrm{OB} = \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ であり, OB と x 軸の正の向きとのなす角は $\boxed{ケ}^\circ$ である。また B の x 座標は $\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}+\sqrt{\boxed{シ}}$ である。

(2) 次に糸をたるみのないように張ったままの状態で, 点 B を起点として糸の BP の部分を毎秒 30° の割合で円 R に巻きつけていく。糸が巻きついている部分の, B ではない方の端点を C とする。$0 \leqq t \leqq 6$ とするとき, 巻きつけ始めてから t 秒後の時点で,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{ス}(\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{\boxed{セ}}\left(t - \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\right) \text{ラジアン},$$

である。ただし $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。また

$$\mathrm{CP} = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi\left(\boxed{テ} - t\right)$$

である。このときの点 P の速さは,

$$\frac{\pi^a}{\boxed{ト}}\left(\boxed{ナ} - t\right), \quad \text{ただし } a = \boxed{ニ},$$

である。

3 s, t を実数とし，関数

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x - 5 & (x \leqq 2) \\ \dfrac{3}{x-t} + s & (x > 2) \end{cases}$$

がすべての実数 x に対して定義され，$x = 2$ で微分可能であるとする。
また，実数 a と正の実数 b に対し，

$$A = \{x \mid f(x) < a\}, \quad B = \{x \mid -b < x < b\}$$

とする。

(1) $t = \boxed{\text{ヌ}}$，$s = \boxed{\text{ネ}}$ である。

(2) A が空集合であるための必要十分条件は，

$$a \boxed{\text{え}} \boxed{\text{ノ}} + \boxed{\text{ハ}} \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。

(3) $B \subset A$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件は，

$$a \boxed{\text{お}} \boxed{\text{フ}}$$

である。

(4) $A \subset B$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件は，

$$a \boxed{\text{か}} \boxed{\text{ヘ}}$$

である。

(5) $x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_1, x_3 \in A$, $x_2 \notin A$ を満たす実数 x_1, x_2, x_3 が存在するための必要十分条件は，

$$a \boxed{\text{き}} \boxed{\text{ホ}} \quad \text{かつ} \quad a \boxed{\text{く}} \boxed{\text{マ}} + \boxed{\text{ミ}} \sqrt{\boxed{\text{ム}}}$$

である。

$\boxed{\text{え}}$ ～ $\boxed{\text{く}}$ の選択肢：
(a) $=$　(b) $<$　(c) $\leqq$　(d) $>$　(e) $\geqq$　(f) $\neq$

4

(1) xy 平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし, 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ における C の接線が x 軸と交わる点を A, y 軸と交わる点を B とする。

$$\mathrm{OA} = \boxed{\text{け}}, \quad \mathrm{OB} = \boxed{\text{こ}}, \quad \mathrm{AB} = \boxed{\text{さ}}$$

である。

$\boxed{\text{け}}$, $\boxed{\text{こ}}$, $\boxed{\text{さ}}$ の選択肢：

(a) $\cos\theta$ (b) $\sin\theta$ (c) $\tan\theta$ (d) $\dfrac{1}{\cos\theta}$ (e) $\dfrac{1}{\sin\theta}$

(f) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ (g) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ (h) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ (i) $\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

(2) xyz 空間において, 頂点が z 軸上の正の部分にあり, 底面が xy 平面上にある直円錐で, その側面が原点を中心とする半径 1 の球面に接しているものを考える。そのような直円錐のうち, 表面積が最小になる場合を考えると, その表面積は $\boxed{\text{メ}}\,\pi$ であり, 頂点の z 座標は $\boxed{\text{モ}}$ である。また, 体積が最小になる場合を考えると, その体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}}{\boxed{\text{ユ}}}\pi$ であり, 頂点の z 座標は $\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}$ である。