(2013年度)

5 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7, $\boxed{イ}$ に－26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) $\dfrac{1}{2}\log_3 384 + \log_9 108 - \log_{\sqrt{3}} 6 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\log_3 2$ である。

(2) $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\sqrt{2} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{3} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{6}$

である。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq |x^2 - 2x| \\ y \leqq -x + 6 \\ |x| \leqq 2 \end{cases}$$

の表す座標平面上の領域を D とする。

(i) D の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii) (x, y) が D を動くとき, $4x + y$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$, 最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

2 座標空間の 3 点 A$(2, 0, 1)$, B$(3, 0, 3)$, C$(2, 1, -1)$ を考える。さらに, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。

(1) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とすると, $\sin\theta = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(2) $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

(3) 点 P$\left(1, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}\right)$ がある。点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{c}$ を満たす必要十分条件は, ある実数 t に対し, 点 Q の座標が

$$\left(\boxed{セ}\,t + \boxed{ソ},\ \boxed{タ}\,t + \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}},\ t - \frac{1}{6}\right)$$

と表されることである。

点 H が $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \vec{c}$ を満たし, さらに, 3 点 A, B, C が定める平面上にあるとき, 点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}},\ \boxed{ナ},\ \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\right)$$

である。

(4) 四面体 ABCP の体積は $\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ k を2以上の整数とし，方程式

$$3x + 2y + z = 6k - 1$$

を考える。

(1) 方程式の正の整数解の組 (x, y, z) の個数は，$k = 2$ のとき $\boxed{\text{ハ}}$，$k = 3$ のとき $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

(2) 方程式の正の整数解の組 (x, y, z) において，x のとりうる値の個数は，$\boxed{\text{フ}}\,k + \boxed{\text{ヘ}}$ である。

(3) 方程式の正の整数解の組 (x, y, z) の個数は，
$\boxed{\text{ホ}}\,k^2 + \boxed{\text{マ}}\,k + \boxed{\text{ミ}}$ である。

以下，k を2以上の偶数とする。

(4) 方程式の正の整数解の組 (x, y, z) のうち $x \leqq k$ を満たすものの個数は，

$$\frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}k^2 + \boxed{\text{モ}}\,k + \boxed{\text{ヤ}}$$

である。

(5) 方程式の正の整数解の組 (x, y, z) のうち $x \leqq k$, $z \leqq 3k$ を同時に満たすものの個数は，

$$\frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}k^2 + \boxed{\text{ラ}}\,k + \boxed{\text{リ}}$$

である。