(2013年度)

6　数　学　問　題　(60分)

(この問題冊子は７ページ，３問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{\text{ア}}$ に7，$\boxed{\text{イ}}$ に－26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) $0 \leqq x < 2\pi$ であるとし,

$$f(x) = \cos^4 x + \sin 3x - \sin^4 x + 2\sin x$$

とおく。$f(x)$ は, $\sin x = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときに最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ をとり, $\sin x = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のときに最小値をとる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を, 次のように定義する。

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

さらに, 数列 $\{a_n\}$ を用いて,

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

と定める。

(i) $S_{3,6} = \boxed{\text{キ}}$, $S_{4,6} = \boxed{\text{ク}}$ である。一般に, すべての自然数 n に対し, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_{n,6} &= a_{n+2} + \boxed{\text{ケ}}\, a_{n+4} + a_{n+5} \\ &= a_{n+2} + a_{n+3} + \boxed{\text{コ}}\, a_{n+4} \\ &= \boxed{\text{サ}}\, a_{n+4} \end{aligned}$$

(ii) すべての自然数 n に対し, $S_{n,10} = qa_{n+r}$ を満たす自然数 q, r は, $q = \boxed{\text{シ}}$, $r = \boxed{\text{ス}}$ である。

2 a, b を実数とし, C_1, C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-a)^2 + b$$

(1) C_1 と C_2 が共有点をもつための必要十分条件は,

$$a^2 + \boxed{\text{セ}}\, b \leqq 0$$

である。

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共有点をもつとき, それらの共有点を P, Q とする。ただし, 点 P の x 座標を p, 点 Q の x 座標を q とすると, $q < p$ である。このとき,

$$pq = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}}\left(a^2 + \boxed{\text{タ}}\, b\right)$$

が成り立つ。点 P における C_1 の接線を ℓ, 点 Q における C_1 の接線を m とする。直線 ℓ は,

$$y = \boxed{\text{チ}}\, px + \boxed{\text{ツ}}\, p^2$$

と表される。

$a > 0,\ b = \dfrac{7}{2}$ とし, 直線 ℓ と m が直交するならば,

$$a = \sqrt{\boxed{\text{テ}}}, \quad p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\boxed{\text{ト}}} + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

となる。このとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積は, $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

3 xy 平面に, 次のような3つの壁 L, U, S がある（図1）。

$$L = \{(x, -2) \mid 0 \leqq x \leqq 9\}, \quad U = \{(x, 4) \mid 0 \leqq x \leqq 9\}$$
$$S = \{(9, y) \mid -2 < y < 4\}$$

xy 平面上を動く点 $\mathrm{P}(m, n)$ を考える。Pが移動できる点は, $(m+1, n+1)$ または $(m+1, n-1)$ である（図2）。Pは原点Oを出発して壁 L, U, S のいずれかに到達するまで移動を続け, いずれかの壁に到達すると移動を停止する。

(1) 原点Oを出発したPが壁 U に到達して移動を停止する場合の経路の数を考える。点 $(4, 4)$ に到達して移動を停止する場合の経路の数は, 図3のように1通りである。また, 点 $(6, 4)$, 点 $(8, 4)$ に到達して移動を停止する場合の経路の数は, それぞれ $\boxed{\text{ネ}}$ 通り, $\boxed{\text{ノ}}$ 通りである。

(2) 原点Oを出発したPが壁 L に到達して移動を停止する場合の経路の数は, 全部で $\boxed{\text{ハ}}$ 通りある。

(3) $\mathrm{P}(m, n)$ が $(m+1, n+1)$ に移動する確率と, $\mathrm{P}(m, n)$ が $(m+1, n-1)$ に移動する確率が, いずれも $\dfrac{1}{2}$ であるとする。このとき, 原点Oを出発したPが壁 L に到達して停止する確率を既約分数 $\dfrac{a}{2^b}$ の形で表すと, $a = \boxed{\text{ヒ}}$, $b = \boxed{\text{フ}}$ である。また, Pが壁 S へ到達して停止する確率を既約分数 $\dfrac{c}{2^d}$ の形で表すと, $c = \boxed{\text{ヘ}}$, $d = \boxed{\text{ホ}}$ である。

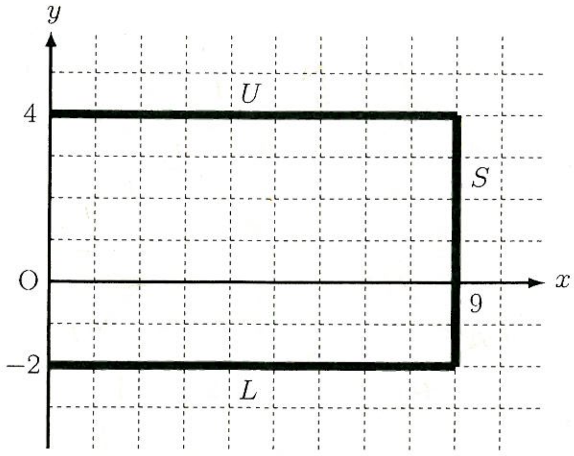

図 1

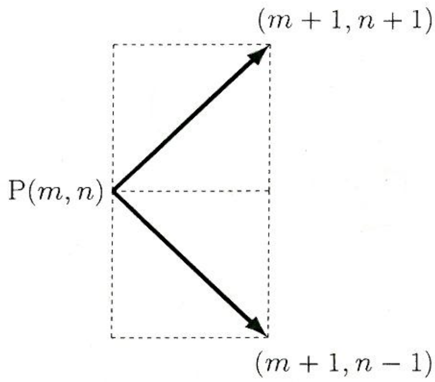

図 2

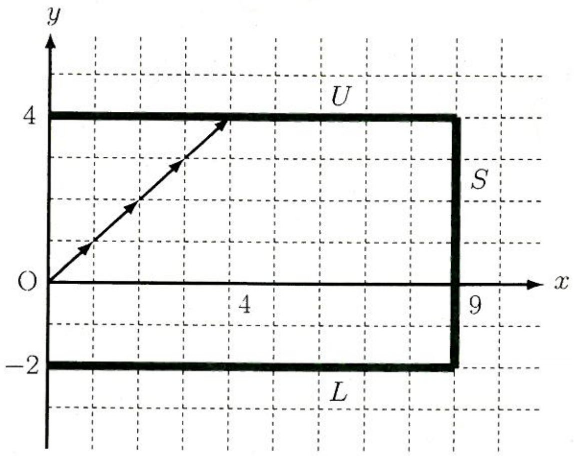

図 3