（2013年度）

4　数　学　問　題　（60分）

（この問題冊子は７ページ，３問である。）

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は，符号欄にマークしない。）

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。）

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7， $\boxed{イ}$ に －26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) 素数とは, 1 と自分自身以外に約数をもたない 2 以上の整数である。

(i) p を素数とする。2 次方程式 $x^2 - p^2x + 4p^2 = 0$ が素数 q を解にもつならば, $p = \boxed{ア}$, $q = \boxed{イ}$ である。

(ii) x, y を正の整数, p を素数とする。$4x^4 + 4y^4 - x^2y^2 = p$ であるならば, $x = \boxed{ウ}$, $y = \boxed{エ}$, $p = \boxed{オ}$ である。

(2) 実数 $\alpha, \beta\,(\alpha \leqq \beta, \beta \neq 0)$ および自然数 n に対して

$$f(n) = \alpha^n + \frac{1}{\beta^n} + 1$$

とおく。$f(1) = 4$, $f(2) = 18$ が成り立っているとき,

$\alpha = \boxed{カ}$, $\beta = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。また, このとき

$$f(n+3) - 4f(n+2) - f(n+1) + 4f(n) = \boxed{ケ}$$

である。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{7}{3} \\ y \geqq |x+1| \end{cases}$$

の表す座標平面上の領域の面積は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

$\boxed{2}$ 1辺の長さが1の正三角形ABCを考える。点P, Q, Rをそれぞれ辺AB, BC, CA上にとり, $AP = a\ (0 < a < 1)$ とする。

(1) 点Q, Rを $PR /\!/ BC$, $QR /\!/ AB$ となるようにとるとき, 三角形PQRの3辺の長さの和 ℓ は,

$$\ell = \boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}\,a^2 + \boxed{\text{セ}}\,a + \boxed{\text{ソ}}}$$

と表される。

(2) 点Qを $CQ = a$ となるようにとる。点Rが辺CA上を動くとき, $PR + QR$ の最小値を m とする。このとき, m を a で表すと,

$$m = \sqrt{\boxed{\text{タ}}\,a^2 + \boxed{\text{チ}}\,a + \boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(3) 点Q, Rが辺BC, CA上を動くとき, 三角形PQRの3辺の長さの和の最小値 n を a で表すと,

$$n = \sqrt{\boxed{\text{テ}}\,a^2 + \boxed{\text{ト}}\,a + \boxed{\text{ナ}}}$$

となる。また, 3辺の長さの和が最小値 n をとるとき, AR, CQを a で表すと,

$$AR = \frac{\boxed{\text{ニ}}\,a^2 + \boxed{\text{ヌ}}\,a}{a + \boxed{\text{ネ}}},\quad CQ = \frac{\boxed{\text{ノ}}\,a^2 + \boxed{\text{ハ}}\,a + \boxed{\text{ヒ}}}{a + \boxed{\text{フ}}}$$

である。

3 A_1, A_2, B_1, B_2 と名前がつけられた4個のさいころがある。これら4個のさいころは，外見上も容易に見分けがつくとする。また，すべてのさいころについて，1から6までのそれぞれの目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする。

最初に A_1, A_2 のさいころを投げ，以下の2つの条件を満たすように整数 a を決める。

[条件1]　a の絶対値 $|a|$ は A_1 の目である。
[条件2]　A_2 の目が3または6であるならば $a < 0$ であり，
　　　　　1, 2, 4, 5 のいずれかであるならば $a > 0$ である。

次に，B_1 と B_2 のさいころを投げる。A_1 を B_1 に置き換え，A_2 を B_2 に置き換えて，上の[条件1]，[条件2]を満たすように1つの整数 b を決める。具体例を2つ挙げる。

(例1) A_1 の目が2，A_2 の目が6ならば，$a = -2$
(例2) B_1 の目が3，B_2 の目が1ならば，$b = 3$

(1) 4個のさいころ A_1, A_2, B_1, B_2 を投げるとき，$ab = -1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$，$ab = 10$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

(2) 4個のさいころ A_1, A_2, B_1, B_2 を投げることによって決まる整数 a と b を用いて，関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^2 + ax + b, \qquad g(x) = bx + a$$

また，放物線 $y = f(x)$ を C，直線 $y = g(x)$ を ℓ とする。

(i) C と ℓ が共有点をもたないような a と b の値の組の総数は，$\boxed{\text{ム}}$ である。そのうち，a と b の符号がいずれも正である組は $\boxed{\text{メ}}$ 組あり，a と b の符号が異なる組は $\boxed{\text{モ}}$ 組ある。

(ii) C と ℓ が共有点をもたない確率は，$\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}$ である。