(2012年度)

7　数　学　問　題　(90分)

(この問題冊子は6ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・ＰＨＳの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は，符号欄にマークしない。）

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。

根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。）

〔解答記入例　7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例　－26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) 関数

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2} - \sin x + a \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

の最小値が $\sqrt{3}$ であるとする。このとき, $a = \boxed{\text{ア}}$ であり, $f(x)$ が最小となるのは $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のときである。

(2) n を 5 以上の自然数とする。1 以上 n 以下の自然数から互いに隣り合わない 2 つを選ぶ組合せは

$$\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(n - \boxed{\text{エ}}\right)\left(n - \boxed{\text{オ}}\right)$$

通りあり, どの 2 つも隣り合わない 3 つを選ぶ組合せは

$$\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\left(n - \boxed{\text{キ}}\right)\left(n - \boxed{\text{ク}}\right)\left(n - \boxed{\text{ケ}}\right)$$

通りある。ただし, $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}}$ とする。

(3) 三角形 OAB において, 辺 OA を 1 : 3 に内分する点を C, 辺 OB を 4 : 3 に内分する点を D とし, 線分 AD と BC との交点を P とする。AP : PD $= s : (1-s)$, BP : PC $= t : (1-t)$ とするとき

$$s = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}, \qquad t = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。また, OP の延長と辺 AB との交点を Q とするとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を実数とし, 放物線 C : $y = x^2 - 2ax + 4a$ を考える。

(1) C が直線 $y = -6x$ と接するのは, $a = \boxed{タ}$ または $a = \boxed{チ}$ のときである。ただし, $\boxed{タ} < \boxed{チ}$ とする。

(2) a がすべての実数を動くとき, C の頂点の軌跡の方程式は

$$y = \boxed{ツ}\,x^2 + \boxed{テ}\,x + \boxed{ト}$$

である。

(3) C が点 (x, y) を通るような a が存在するための必要十分条件は

$$\left(x\ \boxed{あ}\ \boxed{ナ}\right)\quad \boxed{い}\quad \left(y\ \boxed{う}\ \boxed{ニ}\right)$$

である。

(4) 点 $(3, -1)$ を通る C の接線が存在するための必要十分条件は

$$a\ \boxed{え}\ \boxed{ヌ}$$

である。

$\boxed{あ}$, $\boxed{う}$, $\boxed{え}$ の選択肢 :
(a) $<$ (b) $\leqq$ (c) $>$ (d) $\geqq$ (e) $=$ (f) $\neq$

$\boxed{い}$ の選択肢 :
(a) かつ (b) または

3 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。底面 ABC の内接円の半径を r とおき，頂点 O を通り底面 ABC に垂直な直線からの距離が r 以下である点全体からなる円柱を T とする。

(1) $r = \dfrac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}$ である。

(2) 正四面体 OABC の高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$ である。

(3) 辺 AB の中点と頂点 O とを結ぶ線分上に点 P をとり，$x = \mathrm{OP}$ とおく。P を通り底面 ABC に平行な平面による側面 OAB の切り口を L とする。
L が T に含まれるような x の最大値を x_1 とすると

$$x_1 = \frac{\sqrt{\boxed{フ}}}{\boxed{ヘ}}$$

である。
$x_1 \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，L と T の共通部分の長さは

$$\frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}\sqrt{\frac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}} - x^2}$$

である。
正四面体 OABC の表面で T に含まれる部分の面積は

$$\frac{\pi}{\boxed{メ}}$$

である。

4 $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表す。

(1) a, b は $e^{-1} < a < 1,\ b > 0$ を満たす実数とする。曲線 $C : y = \log x$ と直線 $\ell : y = ax + b$ とが接しているとすると,

$$b = \boxed{\text{モ}}\ \log a + \boxed{\text{ヤ}}$$

が成り立つ。このとき, 曲線 C と 3 つの直線 ℓ, $x = 1$, $x = e$ とで囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。a が $e^{-1} < a < 1$ の範囲を動くときの $S(a)$ の最小値は

$$\left(\boxed{\text{ユ}}\ e + \boxed{\text{ヨ}}\right) \log\left(\frac{e + \boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}\right) + \boxed{\text{ル}}$$

で与えられる。

(2) k を正の定数とし, $e^{-k} < t < 1$ である t に対して,

$$f(t) = \int_0^k |e^{-x} - t|\, dx$$

とおく。t が $e^{-k} < t < 1$ の範囲を動くときの関数 $f(t)$ の最小値を $M(k)$ とおくと,

$$M(k) = \left(\boxed{\text{レ}} + e^P\right)^2, \qquad \text{ただし } P = \frac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}}\, k$$

となる。このとき

$$\lim_{k \to +0} \frac{M(k)}{k^2} = \frac{\boxed{\text{ヲ}}}{\boxed{\text{ン}}}$$

である。