（2012年度）

5　数　学　問　題　（60分）

（この問題冊子は７ページ，３問である。）

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・ＰＨＳの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。

根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例　7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
―	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例　－26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
―	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を，$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \log_4 32x - \log_8 64x + \log_{16} 8x$$

とする。$5 \leqq f(x) \leqq 10$ となるための必要十分条件は

$$2^a \leqq x \leqq 2^b,\ a = \boxed{\text{ア}},\ b = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = 4\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x$$

とする。$0 \leqq x < 2\pi$ とすると, $x = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ のとき $g(x)$ は最大値をとる。

(3) m と n を $m \geqq n$ を満たす正の整数とする。3辺の長さがそれぞれ $m+1$, m, n であり, それらの和が 100 以下であるような直角三角形は, 全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。また, そのうち面積が最も大きいものの斜辺の長さは $\boxed{\text{カ}}$ である。

2 直線 $y=x-1$ 上の点 $\mathrm{A}(a, a-1)$ を通り，放物線 $y=x^2$ に接する直線を，ℓ, m とする。ただし，ℓ の方が m よりも傾きが大きいものとする。

(1) 直線 ℓ の傾きを a で表すと

$$\boxed{キ}\left(a+\sqrt{a^2+\boxed{ク}\,a+\boxed{ケ}}\right)$$

である。

(2) 直線 ℓ, m と放物線 $y=x^2$ との接点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積 S を a で表すと

$$S=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\left(a^2+\boxed{シ}\,a+\boxed{ス}\right)^{\frac{3}{2}}$$

であり，$a=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$ をとる。

(3) 放物線 $y=x^2$ 上の点で直線 $y=x-1$ との距離が最小であるのは $\left(\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}, \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\right)$ で，その距離は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\sqrt{\boxed{ネ}}$ である。

3 大きさの同じ N 個の正方形を，図 1 のように左端からつめて高さを 3 段までに並べる。このとき，各段の正方形の数はその 1 つ下の段の正方形の数以下とする。例えば，$N=4$ の場合，図 2 のように 4 通りの並べ方がある。

(1) 上のような並べ方は，$N=5$ のとき $\boxed{ノ}$ 通り，$N=6$ のとき $\boxed{ハ}$ 通り，$N=7$ のとき $\boxed{ヒ}$ 通りである。

(2) 高さが 2 段までの並べ方は，

N が偶数のとき，$\left(\dfrac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}N+\boxed{ホ}\right)$ 通り，

N が奇数のとき，$\left(\dfrac{\boxed{マ}}{\boxed{ミ}}N+\dfrac{\boxed{ム}}{\boxed{メ}}\right)$ 通りである。

(3) $N=6n$ (n は自然数) のとき，高さが 3 段までの並べ方を考える。3 段目の正方形が m 個であるような並べ方が a_m 通りあるとする。図 1 は $N=12$, $m=3$ のときの並べ方の一例である。

m が偶数のとき，

$$a_m=\boxed{モ}n+\frac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}m+\boxed{ヨ}$$

m が奇数のとき，

$$a_m=\boxed{ラ}n+\frac{\boxed{リ}}{\boxed{ル}}m+\frac{\boxed{レ}}{\boxed{ロ}}$$

である。したがって，$N = 6n$ のとき，高さが 3 段までの並べ方は全部で

$$\boxed{\text{ワ}}\,n^2 + \boxed{\text{ヲ}}\,n + \boxed{\text{ン}}$$

通りである。

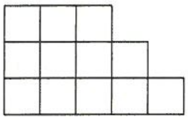

図 1

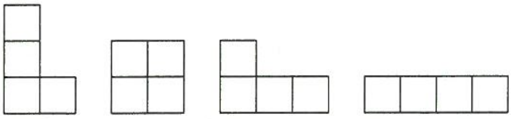

図 2