(2012年度)

6　数　学　問　題　(60分)

(この問題冊子は7ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・ＰＨＳの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。

根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例　7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例　－26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) △OAB に対し,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad s \geqq 0, \quad t \geqq 0$$

とする。また, △OAB の面積を S とする。

(i) $1 \leqq s+t \leqq 3$ のとき, 点 P の存在しうる領域の面積は S の $\boxed{\text{ア}}$ 倍である。

(ii) $1 \leqq s+2t \leqq 3$ のとき, 点 P の存在しうる領域の面積は S の $\boxed{\text{イ}}$ 倍である。

(2) $(\sqrt{2})^n$ は n が奇数のとき無理数である。より一般に, 2 以上の整数 k に対し, $(\sqrt[k]{2})^n$ は n が k の倍数でないとき無理数である。したがって, 2 以上の整数 k に対し,

$$\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt[k]{2}\right)^{100}$$

を展開して得られる x の多項式において,

(i) x^{100} の係数は 2 の $\boxed{\text{ウ}}$ 乗,

(ii) $n = 0, 1, \ldots, 100$ に対し, x^n の係数が整数となるような n の個数は

$k=2$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 個

$k=3$ のとき $\boxed{\text{オ}}$ 個

$k=5$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ 個

$k=7$ のとき $\boxed{\text{キ}}$ 個

$k=51$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ 個

である。

2 xy 平面上で次の不等式の表す領域を D とする。

$$\log_2(2y+1)-1 \leqq \log_2 x \leqq 2+\log_2 y \leqq \log_2 x+\log_2(4-2x)$$

(1) D は次の不等式

$$x \leqq \boxed{\text{ケ}}\, y \leqq \boxed{\text{コ}}\, x^2+\boxed{\text{サ}}\, x$$

および

$$y \leqq \boxed{\text{シ}}\, x+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

により定まる領域である。

(2) D の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(3) $s<1$ とし, 点 (x, y) が D 上を動くとき, $y-sx$ の最大値を $f(s)$ とする。

(i) $\boxed{\text{チ}} \leqq s<1$ のとき, $f(s)=\boxed{\text{ツ}}\, s+\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$

(ii) $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \leqq s<\boxed{\text{チ}}$ のとき,

$$f(s)=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}s^2+\boxed{\text{ノ}}\, s+\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

(iii) $s<\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のとき, $f(s)=\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}s+\dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$

である。

3 右の図1のように 3×3 のマスがあり，各マスに番号が書いてある。AとBが，これらのマスを以下の条件 (i)〜(iv) に従って互いに独立に移動していく。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図1

条件 (i)　Aは一番上のマス1, 2, 3のいずれかから，また，Bは一番下のマス7, 8, 9のいずれかから出発する。

条件 (ii)　A, Bが出発するマスは，それぞれ等しい確率で選ばれる。

条件 (iii)　Aは下の段へ，Bは上の段へ1段ずつ2回動く。

条件 (iv)　Aの1回ごとの動きは，図2の場合は3通り，図3の場合はそれぞれ2通りある。また，それぞれ等しい確率で次のマスに動くものとする。Bの1回ごとの動きについても同様である。

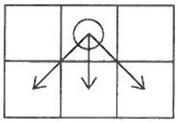

図2

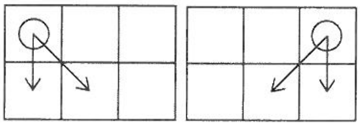

図3

例えばAの移動　$\boxed{1}\rightarrow\boxed{4}\rightarrow\boxed{7}$ を考えると，その確率は $\dfrac{1}{12}$ である。

(1) Aの移動の場合の数は $\boxed{\text{ミ}}$ 通りである。そのうち，移動の確率が最も小さいものは $\boxed{\text{ム}}$ 通りあり，その移動の確率は $\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$ である。

(2) AとBがともに奇数の番号のマスしか通らない確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

(3) AとBが中段のマス4, 5, 6で同じマスを通る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$ である。

nを自然数とし, $(2n+1)\times(2n+1)$のマスの場合を考える。このとき, AとBが3×3のマスの場合と同様に移動するものとする。

(4) AとBが移動したマスを合わせたものが2つの対角線上のすべてのマスとなる確率は

$$\frac{1}{p^2\cdot 3^q}$$

である。ただし, $p=\boxed{\text{リ}}\,n+\boxed{\text{ル}}$, $q=\boxed{\text{レ}}\,n+\boxed{\text{ロ}}$ である。