（2012年度）

4　数　学　問　題（60分）

（この問題冊子は６ページ，３問である。）

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・ＰＨＳの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は，符号欄にマークしない。）

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。

根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。）

〔解答記入例　7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例　－26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) $f(x) = \left| 2\sin x - \cos 2x + \dfrac{1}{2} \right|$ とおく。$\sin x = \boxed{\text{ア}}$ のとき $f(x)$ は最大値 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ をとる。また, $\sin x = \dfrac{\boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき $f(x)$ は最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。

(2) x, y, z は次の条件を満たす実数とする。

$$0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq \frac{4}{5}, \quad x + 2y + z = 1$$

このとき, y の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$, 最大値は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(3) 不等式

$$\log_2 x - 6\log_x 2 \geqq 1$$

の解は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \leqq x < \boxed{\text{セ}}, \quad x \geqq \boxed{\text{ソ}}$$

である。

2 a, b を実数とし, C_1, C_2 をそれぞれ次の2次関数のグラフとする。

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-a)^2 + 2a + b$$

(1) C_1 と C_2 が共有点をもつための条件を a と b で表すと

$$a^2 + \boxed{\text{タ}}\, a + \boxed{\text{チ}}\, b \leqq 0$$

となる。特に b のとりうる値の範囲は $b \geqq \boxed{\text{ツ}}$ であり, $b = \boxed{\text{ツ}}$ のとき C_1 と C_2 はただ1つの共有点 $\left(\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}}\right)$ をもつ。

(2) $b = 6$ とし, C_1 と C_2 は共有点をもつとすると,

$$\boxed{\text{ナ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ニ}}$$

である。このとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形を D とすると, D の面積 S は

$$S = \frac{1}{3}\left(\boxed{\text{ヌ}}\, a^2 + \boxed{\text{ネ}}\, a + \boxed{\text{ノ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

と表される。$a = \boxed{\text{ハ}}$ のとき S は最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ をとる。

(3) $a = \boxed{\text{ハ}}$, $b = 6$ とし, C_1 と C_2 で囲まれた図形を D_0 とする。点 $\mathrm{P}(x, y)$ が D_0 内を動くとき, $x + 2y$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$,

最小値は $\dfrac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

3 座標平面上の点 (x, y) のうち, x, y がともに整数である点を格子点とよぶ。いま, 格子点の集合 A を次のように定義する。

$$A = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 16 < x^2 + y^2 \leqq 36,\ x \text{ と } y \text{ は整数}\}$$

(1) A の点は全部で $\boxed{\text{ム}}$ 個ある。

(2) 格子点上を1秒間に右または上に1動く点 P を考える。P は原点から出発し, A の点の1つに到達したら停止する。このとき, P が到達できない A の点は全部で $\boxed{\text{メ}}$ 個ある。以下, P が到達できる A の部分集合を A_0 とする。

(3) (2) で考えた点 P が右に動く確率と上に動く確率をともに $\dfrac{1}{2}$ とする。また, 各格子点における P の動きは, その点に至るまでの動き方と独立に決まるものとする。

(i) 原点からの経路の数が最も多い A_0 の点は $\mathrm{Q}\left(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}}\right)$ であり, P が Q に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}$ である。

(ii) 原点からの経路の数が Q の次に多い A_0 の点は全部で $\boxed{\text{ラ}}$ 個あり, それらの点のいずれかで P が停止する確率は $\dfrac{\boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}}}$ である。

(iii) P が A_0 の点のいずれかで停止するまでの時間の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}$ 秒である。