（2011年度）

7　数　学　問　題（90分）

（この問題冊子は７ページ，４問である。）

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・ＰＨＳの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. **解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎　この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。

根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例　7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例　－26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) 立方体の各面に 1 ～ 6 の目が 1 つずつ書かれたサイコロを 2 つ振って, 出た目の大きくない方を x とする。$x=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。x の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $A=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ とする。行列 A が表す 1 次変換により, 点 $(3,-2)$ は点 $\left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\right)$ に移り, 点 $\left(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}\right)$ は点 $(3,1)$ に移る。

(3) $f(x)=x^3-9x^2+18x+9$ とし,

$$A=\{\,x\,|\,f(x)>0\,\},\qquad B=\{\,x\,|\,x>-1\,\}$$

とする。次が成り立つ。

$$1\ \boxed{\text{あ}}\ A,\qquad 5\ \boxed{\text{い}}\ A,\qquad A\ \boxed{\text{う}}\ B$$

あ, い, う の選択肢
(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\ni$ (d) $\not\ni$ (e) $\subset$ (f) $\supset$ (g) $=$

また, 正の整数 a に対して,

$$C=\{\,x\,|\,0\leqq x\leqq a\,\}$$

とする。$A\supset C$ となる最も大きい整数 a は $a=\boxed{\text{ケ}}$ である。

2 底面の円の半径が3cm, 高さが6cm の直円錐を考える。直円錐の頂点をP, 底面の円の中心をQとし, 線分PQを2：1に内分する点をOとする。底面の円の円周をC_1, Oを通り底面と平行な平面が直円錐と交わってできる円の円周をC_2とする。

2点A, BがそれぞれC_1, C_2上を頂点Pから見て左回りに移動している。点Aの速さは3πcm/秒, 点Bの速さはπcm/秒であり, 時刻$t=0$において, 3点P, B, Aは一直線上にあるとする。

(1) Aの角速度は $\boxed{\text{コ}}\,\pi$ ラジアン/秒であり, Bの角速度は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ ラジアン/秒である。ただし, Aの角速度とは, 動径QAが1秒間に回転する角の大きさのことであり, Bの角速度とは, 動径OBが1秒間に回転する角の大きさのことである。

(2) 線分ABの長さを時刻tの関数で表すと

$$\sqrt{\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}\cos\frac{\pi}{2}t}\ \text{cm}$$

である。

(3) $\cos\angle\text{AOB}$を時刻tの関数で表すと

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}\cos\frac{\pi}{2}t$$

である。

(4) 三角形AOBの面積を時刻tの関数で表すと

$$\sqrt{\boxed{\text{チ}} - \boxed{\text{ツ}}\cos^2\frac{\pi}{2}t}\ \text{cm}^2$$

である。

(5) 3点A, O, Bを含む平面をSとする。Qを通り, Sと直交する直線をℓとし, ℓとSの交点をHとする。$t = \dfrac{1}{3}$のとき, 線分QHの長さは

$$\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\ \mathrm{cm}$$

である。

$\boxed{3}$ 座標平面において, 動点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として

$$x = t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}, \quad y = t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

で与えられている。

(1) 動点 P の x 座標が最大になるのは $t = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときであり,

y 座標が最大になるのは $t = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ のときである。

(2) $0 < t < 1$ のとき, 動点 P の速さの最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(3) 動点 P が直線 $y = x$ 上に来るのは $t = 0$ のとき, $t = \dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ のとき, $t = 1$ のときの 3 回である。

(4) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき, 動点 P の描く曲線を L とする。L で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

$\boxed{4}$ 実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して, n が $[\sqrt{n}]$ の整数倍で表せるとき, そのような n を小さいものから順に並べて

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

とする。

(1) $n_5 = \boxed{\text{マ}}$ である。

(2) 自然数 p に対して, $[\sqrt{n}] = p$ をみたす自然数 n の集合を M_p とする。M_p の要素で p の整数倍であるものは全部で $\boxed{\text{ミ}}$ 個ある。

(3) 自然数 m に対して,

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

とおく。$k \geqq 1$ のとき, S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k} はいずれも k の多項式で, それぞれの k の1次の項の係数は S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k} の順に $\boxed{\text{ム}}$, $\boxed{\text{メ}}$, $\boxed{\text{モ}}$ である。また, S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k} は共通の因数 $\left(k + \boxed{\text{ヤ}}\right)$ をもつ。

(4) $\displaystyle\lim_{m \to \infty} \frac{\sqrt[3]{S_m}}{m} = \frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}$ である。