福岡大学

2021 年度　一般選抜　数学

（90 分）

I 次の［　　］をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　1 とは異なる 2 つの正の数 x，y が $\begin{cases} x^{x+y} = y^{10} \\ y^{x+y} = x^{90} \end{cases}$ をみたすとき，$x+y=$［（1）］であり，さらに $(x,\ y)=$［（2）］である。

(ii)　2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=x^2-2x+3$，$g(x)=2x^2+6x-1$ と定める。このとき，$f(x) \geqq g(x)$ をみたす x の値の範囲は［（3）］である。関数 $h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$ は，x に対して $f(x)$ と $g(x)$ のうち，大きくない方を値にもつ関数を表すとする。x が $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあるとき，$h(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。このとき $(M,\ m)=$［（4）］である。

(iii)　1 辺の長さが 1 の正六角形 OABCDE において，線分 AC を 3 : 1 に内分する点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$［（5）］である。また，△OBP の面積は［（6）］である。

II 次の［　　］をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　点 $(x,\ y)$ が不等式 $|x-1|+|y+1| \leqq 1$ をみたすように動くとき，$x^2-\dfrac{1}{2}x-y$ の最大値は［（1）］であり，最小値は［（2）］である。

(ii)　自然数 a と b が次の 2 条件

- $a > b$,
- a，b の最大公約数は 10，最小公倍数は 140

をみたすとき，組 $(a,\ b)$ をすべて求めると $(a,\ b) =$ $\boxed{\ (3)\ }$ である。また，自然数 a，b，c が上の 2 条件に加えて次の 3 条件

- $b > c$,
- a，b，c の最大公約数は 2,
- b，c の最小公倍数は 60

をみたすとき，組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めると $(a,\ b,\ c) =$ $\boxed{\ (4)\ }$ である。

III（記述問題）

関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について，次の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(i)　x が $x \geqq 0$ の範囲にあるとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(ii)　部分積分法を繰り返し用いて定積分

$$V_n = \int_0^{2n\pi} |f(x)|\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

の値を求めよ。さらに極限値 $\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。