帝京大学

2021 年度　一般選抜　数学

数学①

（2 科目　120 分）

1 次の □ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) 関数 $f(x)$ が，

$$f(x) = 3x^2 \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 \Big(f'(t)^2 - 2x\Big)dt$$

を満たすとき，

$$f(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2) 放物線 $C_1 : y = (x-1)^2$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線を C_2 とする。C_1 と C_2 の共通接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは □エ□ であり，C_1 と C_2 と ℓ とで囲まれた部分の面積は □オ□ である。

2 次の □ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) 空間における xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 O がある。また，空間内に点 A(2, 2, 1) がある。円 O 上に点 P をとり，点 P の原点 O に関する対称点を Q とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} =$ □ア□ である。

さらに，$\triangle \mathrm{APQ} = \dfrac{3}{2}$ ならば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| =$ □イ□ である。

(2) $\triangle \mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = x$，$\mathrm{BC} = 1$，$\angle \mathrm{B} = \dfrac{2\pi}{7}$ である。このとき，

(i)

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin\dfrac{a\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}$$

を満たす正の整数 a で最小のものは □ウ□ である。

(ii)　x は，$x^3 + \boxed{\text{エ}}\,x^2 = x + 1$ を満たす。

(iii) 辺 BA を A の方向へ延長し，延長上に AD $=1$ となる点 D をとる。このとき，DC $=$ [オ] である。

3 次の [ ] にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) 不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)-\log_3(x-2)>-2$ を満たす x の値の範囲は，

$$[\ \text{ア}\ ]<x<[\ \text{イ}\ ]$$ である。

(2) 関数

$$f(x)=\log_3\left(\frac{4}{x}\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x}\right)\quad(2\leqq x\leqq 6)$$

は，$x=$ [ウ] のとき，最大値

$$\frac{\left(\log_3[\ \text{エ}\ ]\right)^{[\ \text{オ}\ ]}}{4}$$

をとる。

4 次の [ ] にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) 袋の中に赤玉が 2 個，白玉が 4 個入っている。袋から 1 個の玉 A を取り出す。A が赤玉ならば，その玉を袋に戻したうえで，袋から同時に 2 個の玉を取り出す。A が白玉ならば，その玉を袋に戻さずに袋から同時に 2 個の玉を取り出す。このとき，同時に取り出した 2 個の玉が両方とも赤玉である確率は [ア] である。また，両方とも白玉である確率は [イ] である。

(2) 数列 $\{a_k\}$ は，$a_k=\dfrac{(k-1)k}{2}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される。このとき，

(i)

$$\sum_{k=1}^{8}(-1)^{a_k}=[\ \text{ウ}\ ]$$ である。

(ii)

$$\sum_{k=1}^{12}(-1)^{a_k}k^2=[\ \text{エ}\ ]$$ である。

(iii)

$$\sum_{k=1}^{50}(-1)^{a_k}k^2=[\ \text{オ}\ ]$$ である。

数学②

（2 科目　120 分）

1 次の［　　］にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) a を定数とする。関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$ の極大値と極小値の和が 2 であるとき，$a =$［ア］であり，極大値は，

$$\frac{［イ］ + ［ウ］\sqrt{3}}{4}$$

である。ただし，［イ］，［ウ］は整数とする。

(2) b は 0 以上の定数とする。

$\displaystyle\int_0^1 |x^2 - b^2|\,dx$ を最小にする b は $b =$［エ］であり，最小値は［オ］である。

2 次の［　　］にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) $\cos 2\theta + 6\sin\theta$ のとり得る値の範囲は，［ア］$\leqq \cos 2\theta + 6\sin\theta \leqq$［イ］である。

(2) 関数 $y = (6 - \cos 2\theta - 6\sin\theta)^2 + 6(\cos 2\theta + 6\sin\theta)$ の最大値は［ウ］であり，最小値は［エ］である。また，最小値をとる θ に対して，$\cos 2\theta + 6\sin\theta =$［オ］となる。

3 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) $a \leqq b \leqq c$ を満たす正の実数 a，b，c の組 $(a,\ b,\ c)$ は次の 2 条件を満たす。

(i) ab，bc，ca は整数

(ii) $\log_2(a+b+c) = \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c$

このような $(a,\ b,\ c)$ は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 組あり，それらの $\log_2(a+b+c)$ の中で，小さい方から 2 番目の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $x^5 - 1 = 0$ の 1 でない解のひとつを α とするとき，

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \boxed{\text{ウ}}$ であり，$(\alpha - \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4)^2 = \boxed{\text{エ}}$ である。

また，$x^7 - 1 = 0$ の 1 でない解のひとつを β とするとき，

$(\beta + \beta^2 - \beta^3 + \beta^4 - \beta^5 - \beta^6)^2 = \boxed{\text{オ}}$ である。

4 A の箱には 6 本のくじが入っており，そのうち 1 本が当たりで，残りの 5 本ははずれである。B の箱には 3 本のくじが入っており，すべてはずれである。A の箱から 1 本のくじを取り出し B の箱に移したあと，B の箱から 1 本のくじを取り出し A の箱に移す。この操作を n 回くり返した後に A の箱に当たりくじが入っている確率を p_n とする。このとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。解答が有理数となる場合には，整数または既約分数の形で答えること。

(1) $p_1 = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $p_{n+1} = \boxed{\text{イ}} \times p_n + \boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) $p_n = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} \times \left(\boxed{\text{イ}}\right)^n$ である。