久留米大学

2024 年度　一般選抜　数学

（90 分）

（注意）

(1)　問題の文中の ア , イウ などには，特に指示がない限り，符号（−）または数字（0 ～ 9）が入る。

ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する。なお，同一の問題文中に ア , イウ などが 2 度以上現れる場合，原則として，2 度目以降は ア , イウ のように細字で表記する。

(2)　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはならない。例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えよ。またそれ以上約分できない形で答えること。$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを $\dfrac{6}{8}$ のように答えてはならない。

(3)　対数を含む形で解答する場合，真数が最小の自然数となる形で答えること。例えば，$4\log 2$ と答えるところを $2\log 4$ のように答えてはならない。

(4)　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば $4\sqrt{2}$ と答えるところを $2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。

1　(1)　$x^2-9y^2+36y+20=0$ は，「平方完成」を利用することで，

$$(\boxed{\text{ア}}y-\boxed{\text{イ}}+x)(\boxed{\text{ウ}}y-\boxed{\text{エ}}-x)=\boxed{\text{オカ}}$$

と変形できるので，$x^2-9y^2+36y+20=0$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は，

$$(x,\ y)=(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}),\ (\boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}})$$

ただし，ア >0 とする。

(2)　$x^2-3xy-6x+18y+14=0$ を x について解くと，

$$x=\frac{\boxed{\text{シ}}y+\boxed{\text{ス}}\pm\sqrt{\boxed{\text{セ}}y^2-\boxed{\text{ソタ}}y-\boxed{\text{チツ}}}}{2}$$

となるので，$x^2-3xy-6x+18y+14=0$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は，

$(x,\ y)=$ (テ, ト), (ナ, ナ),
(ニヌ, ト), (ネノ, ナ)

2 OA = OB = θ, $\angle$AOB = 2θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ である三角形 OAB がある。点 A から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB との交点を P_1，P_1 から辺 OA に下ろした垂線と辺 OA との交点を P_2，P_2 から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB との交点を P_3 とする。このことを繰り返すことで P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を定めていく。辺 OP_n の長さを x_n，線分 P_nP_{n+1} の長さを y_n，三角形 OP_nP_{n+1} の面積を S_n とする。

(1) x_n と x_{n+1} との関係式は $x_{n+1}=$ (ハ)x_n であり，x_n と y_n の関係式は $y_n=$ (ヒ)x_n であるから，$x_n=\theta\cdot$ (フ)^n であり，

$y_n=\theta\cdot$ ヒ $\cdot$ (フ)^n となる。

ハ, ヒ, フ に当てはまるものを下の⓪～⑤の中から 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

⓪ $\sin\theta$　　① $\cos\theta$　　② $\tan\theta$

③ $\sin 2\theta$　　④ $\cos 2\theta$　　⑤ $\tan 2\theta$

(2) $T=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ とするとき，$T=\dfrac{\theta\sin$ へ $\theta}{$ ホ $(1-\cos$ マ $\theta)}$ であり，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}T=$ ミ である。

(3) p を実数とする。$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\theta^p\sqrt{S_n}$ が 0 以外の値に収束するような p の値は $p=\dfrac{\text{ムメ}}{\text{モ}}$ であり，このときの極限値は ヤ である。

3 (1) 不等式 $1+\log_2(1-x)(1+y) \geqq 2\log_2(y-x+1)$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ユ}}\pi+\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$$

である。

(2) 点 $(x,\ y)$ が (1) の領域を動くとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2}$$

を満たす θ のとりうる値の範囲は，$0 \leqq \theta \boxed{\text{リ}} \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ル}}}$，

$\dfrac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}\pi \boxed{\text{ワ}} \theta < 2\pi$ である。

$\boxed{\text{リ}}$，$\boxed{\text{ワ}}$ に当てはまるものは下の⓪〜②の中から 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

⓪ $=$　　① $<$　　② $\leqq$

4 θ を偏角とする。極方程式 $r=\theta^2$ で表される曲線を C とするとき，

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4\cos 2x\,dx + \boxed{\text{あ}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\sin 2x\,dx = 0$ であることより，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と y 軸とで囲まれた図形の面積は $\dfrac{\pi^{\boxed{\text{い}}}}{\boxed{\text{うえお}}}$ である。

(2) 曲線 C の $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の部分の長さは

$$\frac{1}{\boxed{\text{か}}}\left\{\left(\frac{\pi^2}{\boxed{\text{き}}}+4\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{\pi^2}{\boxed{\text{くけ}}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right\}-\frac{\boxed{\text{こさ}}}{\boxed{\text{し}}}$$

である。

5 異なる n 個から r 個を取る組合せの総数を ${}_nC_r$ とする。$k \geqq 2$ とし，次図のように，一番下の行の左から k 列目のマスに ${}_{2k-1}C_1$ をおく。次に，${}_{2k-1}C_1$ の上に ${}_{2k-1}C_2$，そのまた上に ${}_{2k-1}C_3$ をおいて，k 段目まで順に上に並べていく。このとき，左から k 列目，下から k 段目は ${}_{2k-1}C_k$ となる。さらに，一番下のマスから k 段目まで上に並べたら，今度は ${}_{2k-1}C_k$ の左に ${}_{2k-1}C_{k+1}$ をおき，そのまた左に ${}_{2k-1}C_{k+2}$ をおき，左端まで順に左に並べていく。また，左から 1 列目，下から 1 段目のマスは ${}_1C_1$ とする。左から i 列目，下から j 段目のマス目にある ${}_nC_r$ を $a_{i,j}$ と書く。例えば，$a_{3,4} = {}_7C_5$，$a_{1,3} = {}_5C_5$ である。

${}_7C_7$	${}_7C_6$	${}_7C_5$	${}_7C_4$	
${}_5C_5$	${}_5C_4$	${}_5C_3$	${}_7C_3$	
${}_3C_3$	${}_3C_2$	${}_5C_2$	${}_7C_2$	
${}_1C_1$	${}_3C_1$	${}_5C_1$	${}_7C_1$	

(1) $a_{8,8}$ の値を求めると，$a_{8,8} =$ **すせそた** である。

(2) $a_{i,j} = {}_{11}C_8$ は，$i =$ **ち**，$j =$ **つ** であり，

$a_{i,j} = {}_{203}C_{97}$ は，$i =$ **てとな**，$j =$ **にぬ** であり，

$a_{i,j} = {}_{203}C_{105}$ は，$i =$ **ねの**，$j =$ **はひふ** である。

(3) n を 2 以上の整数とするとき，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} = \boxed{\text{へ}}^{2n-1} - \boxed{\text{ほ}}$$ である。