産業医科大学

2023 年度　一般選抜　数学

1 空欄に当てはまる適切な数を解答紙（省略）の所定の欄に記入しなさい.

濃度 50% のブドウ糖溶液 A，濃度 10% のアミノ酸溶液 B，および濃度 20% の脂肪乳剤溶液 C を使って，合わせて 1400 kcal を点滴で投与する．ここで濃度は溶液の質量に対するブドウ糖，アミノ酸，脂肪乳剤，それぞれの質量の割合である.

それぞれの溶液の密度は 1000 kg/m^3 としてよい．また，ブドウ糖，アミノ酸，脂肪乳剤の単位質量 (g) あたりのカロリーは，それぞれ，4 kcal/g，4 kcal/g，9 kcal/g とする.

溶液 A を 400 mL 用意する．この溶液に含まれるブドウ糖は［ア］g であり，カロリーは［イ］kcal である.

溶液 B により 240 kcal 投与するためには，この溶液を［ウ］mL 用意する必要がある.

所定のカロリーを投与するためには，溶液 C は［エ］mL 用意する必要がある.

2 空欄に当てはまる適切な数を解答紙（省略）の所定の欄に記入しなさい.

(1) 空間内の原点 O を含む四面体 OABC があり，直線 OA 上の動点を P とする．各点の座標は，A(2, 4, 6)，B(−3, 4, 1)，C(8, 3, 2) とする.

BP^2 + CP^2 が最小値になるときの P の座標は［オ］である.

(2) 平行六面体 OABC – DEFG において辺 BF を 4 : 3 に内分する点を Q，直線 OQ が平面 ACD と交わる点を P とする．このとき OP : PQ =［カ］となる.

(3) 高さ h，底面の半径 R，体積一定の直円錐が球に内接している．この球の半径が最小になるとき，$\dfrac{h}{R}$ =［キ］である.

(4) 二等辺三角形 ABC において，AB = AC = 5，BC = 6 とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とする．この三角形の外接円の中心を R，内接円の中心を S とする．線分 AS，SR，RH の長さの比は，AS : SR : RH =［ク］である.

3 次の問いに答えなさい.

(1) 次の式を簡単にしなさい．ただし，分母に根号が残らないようにすること．

$$\frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}-\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}+\sqrt{7}}$$

(2) 二つの複素数 $\alpha=a+ci$，$\beta=b-ci$ がある．複素数平面上の原点 O，点 A(α)，点 B(β)，点 K($k\beta$)，実軸上の点 X(x) を考える．ただし，a，b，c，x，k は正の実数であり $0<k<1$ とする．$\dfrac{\alpha-x}{k\beta-x}$ が実数のとき，△OAX の面積は △XBK の面積の何倍か答えなさい.

(3) 次の和を求めなさい.

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{2}{4k^2-1}$$

(4) 578 と 238 の公約数の和を求めなさい.

(5) 4 つの箱に異なる 6 つの食器を入れる方法は何通りあるか求めなさい.

ただし，1 つも入れない箱があっても良いとする.

(6) 点 A(6, 8) を原点 O を中心として，$\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した位置にある点を点 B としたとき，直線 AB の長さを求めなさい.

(7) $p=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ としたとき，$\sin 3\theta$ を p で表しなさい.

(8) $-\dfrac{4}{3}x^3+4x+a=0$ が異なる実数解を 3 つもち，そのうち 2 つが負で，1 つが正の場合の a の範囲を求めなさい.

(9) 曲線 $y^2=2-\dfrac{1}{4}x^2$ が $y=\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}x^2+\sqrt{2}$ と何個共有点を持つか答えなさい.

(10) 次の積分を計算しなさい.

$$\int_1^e x^2\log x\,dx$$

4 空間の原点を O とする. 異なる 3 点, A, B, C がある. それぞれの座標を $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},\ 0,\ z_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},\ 0,\ z_\mathrm{B})$, $\mathrm{C}(x_\mathrm{C},\ y_\mathrm{C},\ z_\mathrm{C})$ とする．ただし，$x_\mathrm{A} > 0$，$z_\mathrm{A} > 0$，$x_\mathrm{B} < 0$，$z_\mathrm{B} > 0$，$x_\mathrm{C} < 0$，$y_\mathrm{C} < 0$，$z_\mathrm{C} > 0$ であり，点 C から x–z 平面に垂線をおろしたとき，x–z 平面との交点は線分 OB 上にある．

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と z 軸のなす角を α，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と z 軸のなす角を β，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を γ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を Ω とする．ただし，α，β，γ は，すべて 0 より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さく，また，$0 < \Omega < \pi$ とする．角度の単位はラジアンとする．

(1) x_A，z_A，x_B，z_B，x_C，y_C，z_C を α，β，γ を使って表しなさい.

(2) $\cos\Omega$ を α，β，γ を使って表しなさい.

空間上の 1 点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角度を θ とする．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．線分 OD を軸として $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を回転させていく．角度 X のときに $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と一致した ($0 < X \leqq \pi$ とする).

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角度を求めなさい.

(4) θ が変化するとき，次の値を求めなさい.

(4–1) X の最小値とそのときの θ の値

(4–2) X が最大値をとるときの θ の値

(5) $\cos X$ を Ω と θ を用いて表しなさい.