川崎医科大学

2024 年度　一般選抜　数学

1 O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$\mathrm{B}(2-\sqrt{3},\ 1)$ がある．

(1) 線分 OA の長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり，直線 OA と x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$$

である．また，直線 OB の方程式は $y=\left(\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)x$ であり，2 直線 OA，OB のなす角を $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\beta=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である．

(2) 点 A を中心として点 O を通る円を K とし，2 直線 OA，OB と円 K の交点で第 1 象限にあるものをそれぞれ C，D とする．線分 OC，OD および短い方の弧 CD で囲まれる領域を S とする．

(i) 領域 S の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ であり，点 D の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である．

(ii) 円 K 上の点 C における接線の方程式は $y=\boxed{\text{ソ}}x+\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である．また，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 S を動くとき，$x+2y$ の最大値は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}+\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$ である．ただし，$\boxed{\text{テ}}<\boxed{\text{ナ}}$ とする．

(iii) 線分 AC，AD および短い方の弧 CD で囲まれた扇形 ACD を，直線 OD の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi\boxed{\text{ネ}}$ である．

2 OA $= 3$, OB $= 2$, $\cos\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{1}{6}$ の平行四辺形 OACB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$ である．また，平行四辺形 OACB の面積は $\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$ である．

(2) 点 O から対角線 AB に垂線を引き交点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}\vec{b}$ である．また，直線 OD と辺 BC の交点を E とするとき，BE : EC を最も簡単な整数の比で表すと

$$\boxed{\text{シ}} : \boxed{\text{ス}}$$

である．

(3) (2) のとき，3 点 O，A，D を通る円を K とし，その中心を F とする．円 K と直線 OC の交点で O でない方を G，円 K と直線 DF の交点で D でない方を H，円 K と直線 OB の交点で O でない方を I とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{b}$ であり，三角形 OAD の面積を S，五角形 OHAGI の面積を T とすると，$\dfrac{S}{T} = \dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である．

3 自然数 n に対して，定義域を $x \leqq 1$ とする 2 つの関数

$$f_n(x) = x(1-x)^n, \quad g_n(x) = x^2(1-x)^n$$

を定める．

(1) $f_2(x)$ の導関数は，

$$f_2{}'(x) = (x - \boxed{\text{ア}})(\boxed{\text{イ}}x - \boxed{\text{ウ}})$$

であり，$f_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．また，$g_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

(2) すべての自然数 n に対して，

$$f_n(x) - g_n(x) = f_{n+\boxed{\text{コ}}}(x)$$

が成り立つ．

(3) $f_n(x)$ の導関数は，

$$f_n{}'(x) = \boxed{\text{サ}}\{(n + \boxed{\text{シ}})x - \boxed{\text{ス}}\}(1-x)^{n-1}$$

であり，$g_n(x)$ の導関数は，

$$g_n{}'(x) = \boxed{\text{セ}}\{(n + \boxed{\text{ソ}})x - \boxed{\text{タ}}\}x(1-x)^{n-1}$$

である．

(4) 2 つの曲線 $y = f_n(x)$，$y = g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とすると，

$$S_n = \frac{\boxed{\text{チ}}}{(n + \boxed{\text{ツ}})(n + \boxed{\text{テ}})}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ とする．

また，関数 $f_n(x)$ が極大値をとるときの x の値を p_n とおくとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n S_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である．