

数 学

(医 学 部)

— 2月2日 —

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

メモ

次の空欄を埋めなさい。

解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい。

1 (1) 自然数 a, b について等式 $(a+b\sqrt{3})^3 = 530+306\sqrt{3}$ が成り立つとき、 $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\frac{611}{893}$ を既約分数で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) $\triangle OAB$ において、辺 OB を $7:3$ に外分する点を C とする。 s を正の実数とし、線分 AC を $2:s$ に内分する点を P とするとき、線分 OP と辺 AB の交点 Q は OP を $s:1$ に内分している。このときの s の値は $s = \boxed{\text{エ}}$ である。

(4) r は正の定数とする。実数 x, y に関する条件 p, q を次で定める。

$$p: -5 \leq x+y \leq 5 \text{ かつ } -5 \leq x-y \leq 5$$

$$q: x^2+y^2-2x-4y+5 \leq r^2$$

(i) 「 p は q であるための必要条件である」ような正の定数 r の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) 「 p は q であるための十分条件である」ような正の定数 r の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, b_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ であるとき、 $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \boxed{\text{キ}}$ である。

2 本問において複素数を解答欄に書くときは、極形式を用いないで答えよ。

等式 $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たす複素数のうち、虚部が正であるものを α とするとき、 $\alpha = \boxed{\text{ア}}$ である。

(1) p, q を実数とする。方程式 $|p+aq| = 1$ を満たす p と q の組の中で、 q の値が最大となる組は $p = \boxed{\text{イ}}$ 、 $q = \boxed{\text{ウ}}$ である。また、方程式 $|p+aq| = 1$ かつ $|p+iq| = 1$ を満たす p と q の組の中で、 q の値が最大となる組は $p = \boxed{\text{エ}}$ 、 $q = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) 次の2つの条件を満たす複素数 p と q の組を考える。

(a) $|q| = 1$ かつ aq は実数である。

(b) $|p+aq| = 1$ かつ $|p| = \sqrt{3}$ 。

このような p と q の組の中で p の実部が負、虚部が正であるものは $p = \boxed{\text{カ}}$ 、 $q = \boxed{\text{キ}}$ である。

(3) p を複素数、 q を絶対値が1、偏角が $\frac{\pi}{3}$ の複素数とする。方程式 $|p+aq| = 1$ を満たす点 p は、点 $\boxed{\text{ク}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ケ}}$ の円を描く。また、方程式 $|p+aq| = 1$ かつ $|p+\bar{a}q| = 1$ かつ $|p| = \sqrt{3}$ を満たす複素数 p は $p = \boxed{\text{コ}}$ である。

3

区間 $0 \leq x \leq 1$ において定義された 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して

$$I_n(f(x), g(x)) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく.

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ のとき,

$$\begin{aligned} I_n(x^2, x^3) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n (\text{ア} k^4 + \text{イ} k^3 + \text{ウ} k^2) \end{aligned}$$

と表されるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x^2, x^3) = \text{エ}$ である.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\sin \pi x, x^2) = \text{オ}$

(3) 区間 $0 \leq x \leq 1$ において, 次の 3 つの関数 $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$ を考える.

$$h_1(x) = x - x^2, \quad h_2(x) = 1 - e^{-x}, \quad h_3(x) = x$$

(i) $h_1(x) - h_2(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値は カ であり, 最小値は キ である.

(ii) $h_2(x) - h_3(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値は ク であり, 最小値は ケ である.

(iii) $I_n(x^2, e^x)$ を $h_2(x)$ を用いて表すと,

$$I_n(x^2, e^x) = \sum_{k=1}^n \text{コ} h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

である.

(i), (ii), (iii) を利用すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x^2, e^x) = \text{サ}$ である. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ I_n(x^2, e^x) + I_n(e^x, x^2) \} = \text{シ}$$

メモ

× 毛

メモ

