

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中には持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき, k 回目に出る目を X_k ($k = 1, 2, 3$) とする。このとき,

積 $X_1 X_2 X_3$ が 10 の倍数になる確率は (ア) ,

和 $X_1 + X_2$, $X_2 + X_3$, $X_3 + X_1$ が, いずれも 6 の倍数にならない確率は (イ)

である。

2. 次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 3 以上の自然数 n について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2\log(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{2\log n}$$

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ を求めよ。

(3) $m \geq n$ をみたす 3 以上の自然数 m, n について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

3. 自然数 p は 2 以上の定数とする。 xy 平面上で不等式 $x^2 - py^2 \geq -1$ の表す領域を D とする。自然数 r は、円 $(x - p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるような最大のものとするとき、次の問いに答えよ。

(1) r を p を用いて表せ。

(2) (1) のもとで、関係式 $(x - p)^2 + y^2 = r$ をみたす互いに異なる素数の組 (x, y, p) のうち、 p の値が最小となるものを求めよ。

4. z は実数ではない複素数で, $z + \frac{1}{z-1}$ が正の実数となるものとする。このとき,
 $\left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right|$ がとり得る値の範囲を求めよ。ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数とする。

