

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中には持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

1 から 3 までの番号をつけた赤玉 3 個と、1 から 3 までの番号をつけた白玉 3 個が入った袋から、玉を 1 個ずつ 3 回取り出し、玉に書かれた番号を取り出した順に a_1, a_2, a_3 とする。ただし、取り出した玉はもとに戻さないものとする。

取り出した 3 個の玉が、赤玉 2 個、白玉 1 個であったとき、

$a_1 < a_2 < a_3$ となる条件付き確率は (ア) ,

$a_1 < a_2$ かつ $a_2 > a_3$ となる条件付き確率は (イ)

である。

2. $1 < a < 2$ をみたす実数 a について,

$$S(a) = \int_1^2 |\log(1+x) - \log ax| dx$$

とすると、次の問いに答えよ。ただし、 $\log$ は自然対数である。

- (1) a の値に応じて、 $1 \leq x \leq 2$ の範囲で方程式 $\log(1+x) - \log ax = 0$ の解の個数を調べよ。
- (2) $S(a)$ を求めよ。
- (3) $S(a)$ ($1 < a < 2$) の最小値と、そのときの a の値を求めよ。

3. p, q は互いに素である自然数とする。実数 a, b, c に対して, x の 2 次多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。ただし, $a \neq 0$ とする。

$f(x)$ が条件「ある整数 k について $f(k-1), f(k), f(k+1)$ は整数となり, $f(x)$ は $px - q$ で割り切れる」をみたすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\frac{2a}{p}, \frac{2c}{q}$ は整数であることを示せ。

(2) 命題「 $f(x)$ が上の条件をみたすならば, $\frac{a}{p}, \frac{c}{q}$ は整数である」は正しいか。正しいければそれを示せ。正しくなければ, 反例を 1 つあげよ。

4. O を原点とする xyz 空間において, 3 点 $A(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$, $B(-1, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$, $C(0, 0, 2)$ の定める平面 ABC 上に O から垂線 OH を下ろす。平面 ABC において, H を中心とする半径 1 の円板 (内部を含む) D を考えるとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 平面 $z = t$ が D と交わるような t の値の範囲を求めよ。
- (2) D を z 軸のまわりに 1 回転させるとき, D が通過してできる立体 K の体積 V を求めよ。

