物　　理

第　1　問（35点）

等速円運動をする物体について，以下の問いに答えよ．

問１　図のように点Ｏを中心とした半径 r〔m〕の等速円運動をする小物体が，微小時間 Δt〔s〕の間に，点Ｐから点Ｑまで微小な角度 $\Delta\theta$〔rad〕だけ回転したとする．このとき，角速度 ω〔rad/s〕は

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

で表される．

(1)　解答欄の図に点Ｐにおける速度 $\vec{v}$〔m/s〕と点Ｑにおける速度 $\vec{v'}$〔m/s〕をかき入れよ．

(2)　この小物体の加速度を $\vec{a}$〔m/s^2〕とするとき，その方向は円の中心を向き，大きさは $r\omega^2$ となることを図をかいて説明せよ．

問２　太陽を中心とした半径 r〔m〕の等速円運動をしている質量 m〔kg〕の惑星Ａを考える．Ａが太陽を１周するのに要する時間を T〔s〕とすると，ケプラーの第３法則により

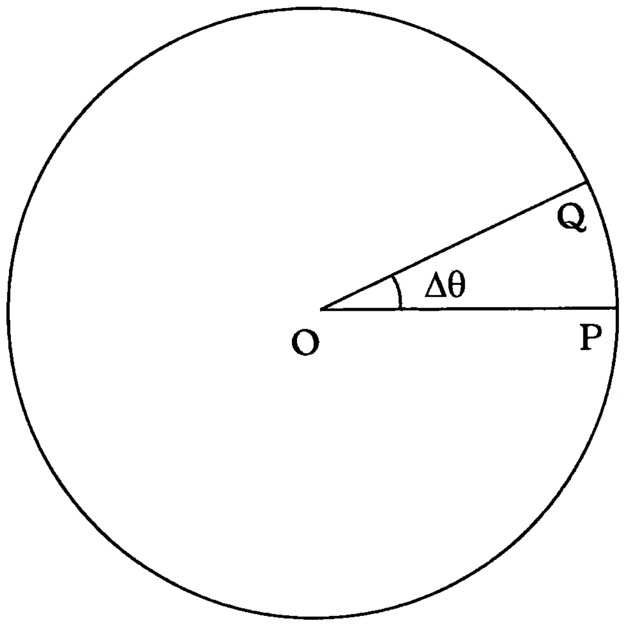
$$T^2 = kr^3 \qquad (k \text{ は比例定数})$$

という関係がある．

(1)　惑星Ａの運動方程式とケプラーの第３法則より，Ａに働く力の大きさ F〔N〕を r, k, m で表せ．

(2)　惑星Ａの速さ v〔m/s〕を r, k で表せ．

(3)　惑星Ａと同じ質量 m の惑星Ｂが太陽を中心とした半径 $2r$ の等速円運動をしているとする．Ａ，Ｂどちらの惑星の力学的エネルギーがどれだけ大きいか．


Q
Δθ
O
P

物　　　理

第 2 問 (35点)

ある物質の抵抗率と誘電率を求めるために，図1のように，面積 S〔m^2〕，間隔 ℓ〔m〕の平行極板の間に，極板全面にわたってすきまなくその物質を挿入する．これに交流電源をつなぎ，回路に流れる電流 I〔A〕を測定することによって，この物質の抵抗率 ρ〔Ω・m〕と誘電率 ε〔F/m〕を求めることができる．時刻 t〔s〕での交流電源の電圧は，角振動数 ω〔rad/s〕を用いて，$V = V_0 \sin\omega t$〔V〕で表される．以下の問いに答えよ．

問1　極板間の抵抗 R〔Ω〕と電気容量 C〔F〕を S，ℓ，ρ，ε のうち必要なものを用いて表せ．

図1で表される回路は，図2のように，抵抗値 R の抵抗と電気容量 C のコンデンサーを並列に接続した回路に交流電圧 V を加えた回路と同等である．

問2　時刻 t〔s〕において，抵抗に流れる電流 I_R〔A〕およびコンデンサーに蓄えられている電気量 Q〔C〕を求めよ．

問3　コンデンサーに蓄えられている電気量が，時刻 t から微小時間 Δt〔s〕だけ経過する間に ΔQ〔C〕だけ変化したとすれば，コンデンサーを流れる電流 I_C〔A〕は，$I_C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ で表される．これを用いて次式を導け．

$$I_C = \omega C V_0 \cos\omega t$$

なお，$|x|$ が1に対して十分小さいとき，$\sin x \fallingdotseq x$ および $\cos x \fallingdotseq 1$ となることを用いよ．

問4　回路に流れる全電流 I は，$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ と表すことができる．I_0 および $\tan\varphi$ を V_0，ω，R，C のうち必要なものを用いて表せ．

問5　問4と問1の結果を使って，極板の間に入れた物質の抵抗率 ρ と誘電率 ε を S，ℓ，V_0，I_0，ω，φ のうち必要なものを用いて表せ．

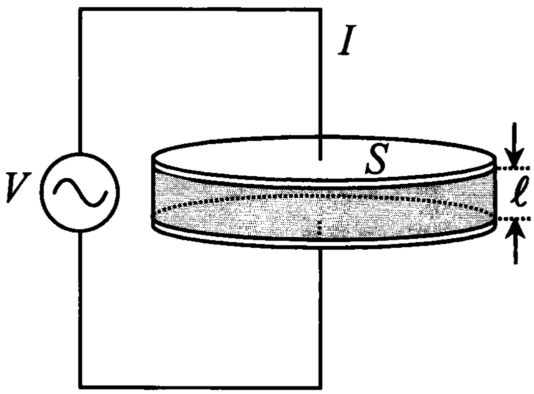


図1

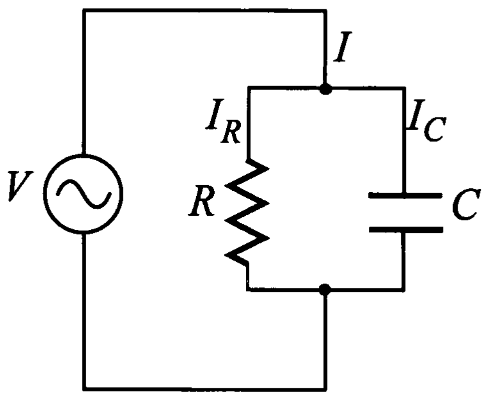


図2

物　　理

第 3 問 (30点)

図1のように，水平な床に垂直に固定されたシリンダーが，圧力 P_0 〔N/m^2〕の大気中に置かれている．シリンダーには，断面積 S 〔m^2〕，質量 m 〔kg〕のなめらかに動くピストンが取り付けられており，内部には n 〔mol〕の分子からなる理想気体が閉じ込められている．この理想気体には周囲から熱の出入りがなく，気体の圧力 p 〔N/m^2〕，温度 T 〔K〕，体積 V 〔m^3〕の間には，理想気体の状態方程式と，

$$pV^{\gamma} = k \ (\gamma \text{ は1より大きい定数}，k \text{ は定数})$$

の関係が常に成立しているものとする．重力加速度の大きさを g 〔m/s^2〕，気体定数を R 〔J/mol・K〕として，以下の問いに答えよ．

問1　最初，ピストンはシリンダーの底から高さ h 〔m〕の位置に静止している．このときのシリンダー内の気体の圧力を p_1 〔N/m^2〕，温度を T_1 〔K〕とする．p_1 および h を m，g，P_0，S，n，R，T_1 のうち必要なものを用いて表せ．

ピストンを高さ h から少しだけ持ち上げて静かにはなすと，ピストンが動きだした．

問2　図2のように，ピストンの高さが $h+x$ 〔m〕になったとき，シリンダー内の気体の圧力が p_2 〔N/m^2〕になった．このとき，$pV^{\gamma}=k$ の関係を用いて，近似的に

$$p_2 = p_1\left(1-\gamma\frac{x}{h}\right)$$

となることを示せ．ここで，$|x|$ は h に対して十分小さいものとする．なお，定数 a に対し，$|y|$ が1に対して十分小さいとき，$(1+y)^a \fallingdotseq 1+ay$ となることを用いよ．

問3　問2の状態で，ピストンにはたらく力 F 〔N〕を x，p_1，h，S，γ で表せ．ただし，F は鉛直上方を正とする．

問4　ピストンはどのような運動を行うか，理由をつけて述べよ．

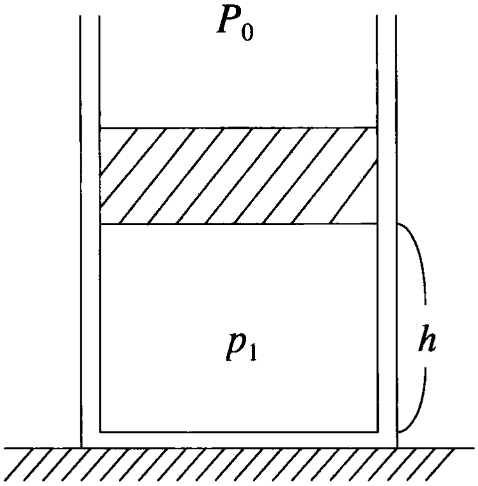


図 1

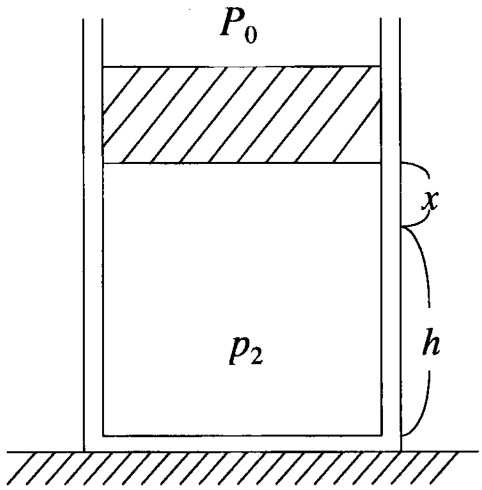


図 2