

2025 年度

数 学 問 題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

- 1 問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で8ページ，解答用紙は全部で4枚である。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右2箇所），氏名を必ず記入すること。なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること。
- 4 解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある。
- 6 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない。
- 7 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
- 8 問題冊子は持ち帰ること。

(余 白)

第 1 問 (50点)

数列 $\{I_k\}$ を

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos x - k \sin 2x| dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. ただし a は $0 < a < 2$ を満たす実数である. 次の問いに答えよ.

問 1 I_k を, 積分を用いない a と k のみの式で表せ.

問 2 2 以上の整数 n に対し, 3 つの数

$$\log n, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

の大小を比較せよ. ただし $\log$ は自然対数である.

問 3 b を実数とする.

$$J_n = \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^n I_k + bn^2 \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

によって定まる数列 $\{J_n\}$ が収束するとき, a と b を求めよ. また, そのときの極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ を求めよ. ただし $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = \infty$ が成り立つことは用いてよい.

(余 白)

第 2 問 (50点)

座標空間において 4 点 $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$, $C(1, 4, 2)$, $D(-1, 1, 0)$ を考える. 次の問いに答えよ.

問 1 3 点 A , B , C を含む平面において, 点 B を通り直線 AC に垂直な直線を ℓ , 点 C を通り直線 AB に垂直な直線を m として, ℓ と m の交点を E とする. 点 E の座標を求めよ.

問 2 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し, 線分 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を P , 線分 AC を $t : (1 - t)$ に内分する点を Q , 線分 CD を $(1 - t) : t$ に内分する点を R , 線分 BD を $(1 - t) : t$ に内分する点を S とする. 4 点 P , Q , R , S は同一平面上にあることを示せ.

問 3 4 点 P , Q , R , S を含む平面を α とする. 平面 α による四面体 $ABCD$ の切り口の面積を t の式で表せ.

問 4 平面 α に平行な平面のうちで点 E を通るものを β とすると, 四面体 $ABCD$ は平面 β によって 2 つの部分に分けられる. それらのうちで辺 BC を含む方の図形の体積を求めよ.

(余 白)

第 3 問 (50点)

自然数 N の正の約数の個数を n とする. N の正の約数を, 小さい順に $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$ と表す. したがって

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{n-1} < d_n = N$$

である. いま, $n \geq 5$ かつ

$$(d_3 - d_2)(d_4 - d_2)(d_5 + d_2) = (2d_2)^3$$

が満たされているとする. 次の問いに答えよ.

問1 $2 < a < b < c$ かつ $(a-2)(b-2)(c+2) = 2^6$ を満たす整数 a, b, c の組をすべて求めよ.

問2 $d_2 \neq 2$ であることを示せ.

問3 $d_2 = 3$ であることを示せ.

問4 d_3, d_4, d_5 を求めよ.

(余 白)

第 4 問 (50点)

xy 平面において 3 点 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$ を考える. ただし α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数である. また, $f(\theta) = 2 \cos \theta - 1$ とおく. 次の問いに答えよ.

問 1 点 O と直線 PQ の距離を α の式で表せ.

問 2 次の等式を示せ.

$$f(\theta) \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2}$$

問 3 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t) \cos t, \quad y = f(t) \sin t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{3} \right)$$

と表される曲線を C とする. 曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有することを示せ. また, その共有点を R とするとき, $\angle POR$ を α の式で表せ.

