

2023 年度

数 学 問 題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

- 1 問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で 8 ページ，解答用紙は全部で 4 枚である。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右 2 箇所），氏名を必ず記入すること。なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること。
- 4 解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある。
- 6 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない。
- 7 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
- 8 問題冊子は持ち帰ること。

(余 白)

第 1 問 (50点)

A, B の 2 人が階段の一番下の段にいる. 2 人はじゃんけんをして, 下記のルールに従い階段を移動するゲームを繰り返し行う.

- A は勝ったら 1 段のぼり, あいこか負けた場合, 同じ段にとどまる.
- B はグー, チョキで勝ったら 1 段のぼり, パーで勝ったら 3 段のぼる. また, あいこか, グー, チョキで負けた場合, 同じ段にとどまる. パーで負けたら階段の一番下の段まで戻る (すでに一番下の段にいる場合はとどまる).

A, B ともに, $\frac{1}{3}$ ずつの確率でグー, チョキ, パーを出すものとし, すべての試行は独立とする. 2 回目以降のゲームは, 2 人とも直前のゲームでの移動を終えた位置で行うものとする. 階段の一番下の段を 0 段目とし, そこから m 段のぼった段を m 段目とする. 次の問いに答えよ.

問 1 n は自然数とし, m は $0 \leq m \leq n$ である整数とする. n 回のゲームを終えた結果, A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ を求めよ.

問 2 m は 0 以上の整数とする. 2 回のゲームを終えた結果, B が m 段目にいる確率 y_m を求めよ.

問 3 n は自然数とする. n 回のゲームを終えた結果, B が 0 段目にいる確率 z_n を求めよ.

(余 白)

第 2 問 (50点)

i は虚数単位を表すものとする. 複素数 z に関する方程式

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}$$

の表す複素数平面上の図形を ℓ とする. 次の問いに答えよ.

問 1 ℓ は直線であることを証明せよ.

問 2 直線 ℓ に関して複素数 w と対称な点を w の式で表せ.

問 3 複素数 z に対して, z を点 1 を中心に反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_1 とし, 次に z_1 を原点を中心に反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_2 とする. さらに, 直線 ℓ に関して z_2 と対称な点を $f(z)$ とする. $f(z)$ を z の式で表せ.

問 4 $f(z)$ は問 3 のとおりとする. 複素数 z に関する方程式

$$f(z) = -z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

の表す複素数平面上の図形を図示せよ.

(余 白)

第 3 問 (50点)

次の問いに答えよ.

- 問1 a, b は実数とし, $f(x)$ は a, b が属する开区間で定義された関数とする. $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき, 次の等式を証明せよ.

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x) dx = (b-a)(f(a) + f(b)) - 2 \int_a^b f(x) dx$$

- 問2 t を正の実数とする. 次の不等式を証明せよ.

$$0 \leq \int_t^{t+1} \log x dx - \frac{1}{2}(\log t + \log(t+1)) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right)$$

- 問3 次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n}$ を求めよ.

$$a_n = \log(n!) - n \log n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(余 白)

第 4 問 (50点)

p は素数とする. 次の問いに答えよ.

問 1 j を $0 < j < p$ である整数とすると, 二項係数 ${}_pC_j$ は p で割り切れることを示せ.

問 2 自然数 m に対して $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れることを示せ.

問 3 自然数 m に対して $m^p - m$ は p で割り切れることを示せ. さらに m が p で割り切れないときには, $m^{p-1} - 1$ が p で割り切れることを示せ.

ここで, 次の集合 S を考える.

$$S = \{4n^2 + 4n - 1 \mid n \text{ は自然数}\}$$

例えば, $n = 22$ とすると $4n^2 + 4n - 1 = 2023$ なので 2023 は S に属する. 次の問いに答えよ.

問 4 整数 a が S に属し, $a = 4n^2 + 4n - 1$ (n は自然数) と表されているとする. このとき, a と $2n + 1$ は互いに素であることを示せ.

問 5 p は 3 以上の素数とする. p が S に属するある整数 a を割り切るならば, $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れることを示せ.

