前 期 日 程

2022 年度

数　学　問　題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で 9 ページ，解答用紙は全部で 4 枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右 2 箇所），氏名を必ず記入すること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

8　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問（50点）

log を自然対数，e をその底とする．次の問いに答えよ．

問1　$x \geqq 0$ のとき，

$$x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示せ．

問2　$t \geqq 0$ とする．次の極限を t を用いて表せ．

$$\lim_{n\to\infty} e^{nt}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n^2}$$

問3　問 2 で求めた極限を $f(t)$ とおく．このとき

$$\int_0^{100} f(t)\,dt < \frac{e^{5000}}{50}$$

が成り立つことを示せ．

（余　　白）

第　2　問　(50点)

n を 2 以上の整数とする．1 から 6 までの目のある 1 個のさいころを n 回続けて投げるとき，n 回目で初めて直前の回と同じ目が出る確率を P_n で表す．次の問いに答えよ．

問 1　　P_n を n を用いて表せ．

問 2　　$S_n = \sum_{k=2}^{n} P_k$ を n を用いて表せ．

問 3　　$S_n \geqq \frac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ．

問 4　　$E_n = \sum_{k=2}^{n} kP_k$ を n を用いて表せ．

（余　　白）

第　3　問　（50点）

p，q を自然数とする．次の問いに答えよ．

問1　$p=7$，$q=11$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ．

問2　$p=6$，$q=9$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組は存在しないことを示せ．

問3　i を虚数単位とする．自然数 n に対して，集合 X_n を

$$X_n = \left\{ \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \right)^k \,\middle|\, k \text{ は整数} \right\}$$

と定める．また，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組が存在すると仮定する．このとき，集合 X_{pq} に属するすべての数は，X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されることを示せ．

問4　集合 X_n は問 3 で定めたものとする．複素数

$$\cos\frac{2\pi}{pq} + i\sin\frac{2\pi}{pq}$$

が X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されるとき，p と q は互いに素であることを示せ．

（余　　白）

第 4 問 (50点)

実数 t に対して,

$$f(t) = 2\cos t + \cos 2t, \qquad g(t) = 2\sin t - \sin 2t$$

とおく. t を媒介変数として $x = f(t)$, $y = g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち,

$$0 < t < \frac{2}{3}\pi, \qquad \frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi, \qquad \frac{4}{3}\pi < t < 2\pi$$

の部分をそれぞれ C_0, C_1, C_2 とする. また, $0 < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して, 点 $(f(\alpha), g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする. 次の問いに答えよ.

問1　次の等式を示せ.

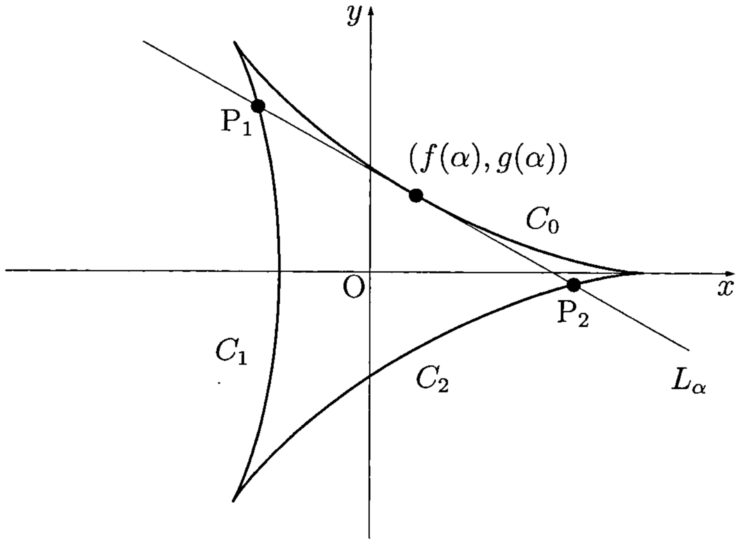
$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2} + g(t)\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\left(t + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(2t - \frac{\alpha}{2}\right)$$

問2　次の等式を示せ.

$$(f(t) - f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2} + (g(t) - g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2} = 4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2 \sin\left(t + \frac{\alpha}{2}\right)$$

問3　接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ と表す. ただし $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする. このとき, θ を α を用いて表せ.

問4　L_α と C_1 の交点を P_1 とし, L_α と C_2 の交点を P_2 とするとき, 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは α によらず一定であることを示せ.



C_0，C_1，C_2 の概形