

2021 年度

数 学 問 題

(理学部・工学部・医学部医学科)

注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で8ページである。脱落のあった場合には申し出ること。なお、解答用紙は上部で接着してあるので、はがさずに解答すること。
- 3 解答用紙は全部で4枚である。各ページ所定欄に、それぞれ氏名、受験学部、受験番号（最後のページは、左右2か所）を忘れずに記入すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが、採点はしない。
- 6 机上に各自の「受験票」と「大学入学共通テスト受験票」を出しておくこと。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

(空 白)

第 1 問 (50 点)

区間 $0 \leq x \leq 1$ 上の連続関数 $f(x)$ と自然数 n に対し

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

とおく. また

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(I_n - \int_0^1 f(x) dx \right)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

問 1 $f(x) = x^2$ のとき D の値を求めよ.

問 2 $f(x) = x^3$ のとき D の値を求めよ.

問 3 $f(x) = e^x$ のとき D の値を求めよ.

ただし, $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + a_n$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}$ となることを用いてよい.

(空 白)

第 2 問 (50 点)

n を 3 以上の自然数とする. 単位円に内接する正 n 角形の面積を A_n , この正 n 角形の各辺の中点を順に結んでできる正 n 角形の面積を B_n で表すとき, 次の問いに答えよ.

問 1 A_n を n を用いて表せ.

問 2 B_n を n を用いて表せ.

問 3 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ.

問 4 $n \geq 32$ のとき, 不等式 $\frac{B_n}{A_n} > \frac{99}{100}$ が成り立つことを示せ.

(空 白)

第 3 問 (50 点)

xyz 空間の中で、方程式 $y = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$ で表される図形は、放物線を y 軸のまわりに回転して得られる曲面である。これを S とする。また、方程式 $y = x + \frac{1}{2}$ で表される図形は、 xz 平面と 45 度の角度で交わる平面である。これを H とする。さらに、 S と H が囲む部分を K とおくと、 K は不等式

$$\frac{1}{2}(x^2 + z^2) \leq y \leq x + \frac{1}{2}$$

をみたす点 (x, y, z) の全体となる。このとき、次の問いに答えよ。

問 1 K を平面 $z = t$ で切ったときの切り口が空集合ではないような実数 t の範囲を求めよ。

問 2 問 1 の切り口の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

問 3 K の体積を求めよ。

(空 白)

第 4 問 (50 点)

n 個の球の入った箱から球を一つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返す. ただし $k \leq n$ とする. 各回について, どの球が取り出されるかは同様に確からしいとする. 取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n, k)$ とおくと, 次の問いに答えよ.

問 1 $P(n, k)$ を n と k を用いて表せ.

問 2 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(n, k))^n$ を $Q(k)$ とおくと, $Q(k)$ を k を用いて表せ. ただし公式 $\lim_{x \rightarrow +0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ を用いてもよい.

問 3 無限級数

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log Q(k)}$$

の値を求めよ. ただし \log は自然対数を表す.

