前期日程用

平成21年度　大阪市立大学第２次試験

数　学　問　題

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で８ページである．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右２か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部の受験者は，１ページから４ページまでの問題，計４問を解答すること．

7　理学部・工学部・医学部医学科の受験者は，５ページから８ページまでの問題，計４問を解答すること．

8　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

9　問題冊子は持ち帰ること．

第　1　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

次の問いに答えよ.

問1　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi} x$ であることを示せ.

問2　次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n \sin x}\, dx = 0$$

第 2 問 （50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

四面体OABCにおいて，

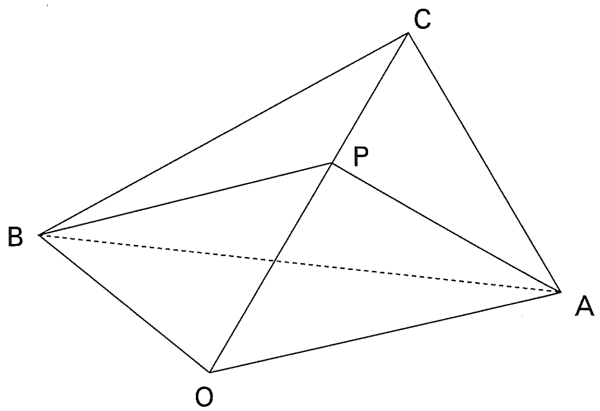
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$$

とする．$0 \leqq t \leqq 1$ なる実数 t に対して，点Pを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$ により定める．三角形ABPの面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ．

問1　$S(0)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

問2　$S(1)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

問3　$\mathrm{O}=(0,0,0)$，$\mathrm{A}=(1,0,0)$，$\mathrm{B}=(0,1,0)$，$\mathrm{C}=(1,1,1)$ とするとき，$0 \leqq t \leqq 1$ において $S(t)$ が最小となる t を求めよ．



第 3 問 (50点) (理学部・工学部・医学部医学科)

xy 平面の原点をOとする．xy 平面上のOと異なる点Pに対し，直線OP上の点Qを，次の条件(a)，(b)を満たすようにとる．

(a) $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$

(b) Qは，Oに関してPと同じ側にある．

このとき，次の問いに答えよ．

問1 点Pが直線 $x = 1$ の上を動くとき，点Qの軌跡を求めて，図示せよ．

問2 $a > r > 0$ とする．点Pが円 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ の上を動くとき，点Qの軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

第　4　問　(50点)　(理学部・工学部・医学部医学科)

一般に 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A) = ad - bc$ と表すことにする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　2 次の正方行列 A，B に対して，

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\,\Delta(B)$$

が成り立つことを示せ．

問 2　自然数 n に対して，

$$\Delta(A^n) = \Delta(A)^n$$

が成り立つことを示せ．

問 3　n は正の偶数とする．実数を成分とする 2 次の正方行列 A で

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすものは存在しないことを示せ．

問 4　n は正の奇数とする．実数を成分とする 2 次の正方行列 A で

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすものを 1 つ求めよ．