前期日程用

平成20年度　大阪市立大学第２次試験

数　学　問　題

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で８ページである．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右２か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部の受験者は，１ページから４ページまでの問題，計４問を解答すること．

7　理学部・工学部・医学部医学科の受験者は，５ページから８ページまでの問題，計４問を解答すること．

8　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

9　問題冊子は持ち帰ること．

第　1　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

次の問いに答えよ.

問1　実数 x, y に対し

$$(1+x)(1+y) \leqq \left(1+\frac{x+y}{2}\right)^2$$

を示せ. また, 等号が成立するのはどのようなときか.

問2　a, b, c, d を -1 以上の数とするとき

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leqq \left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

を示せ. また, 等号が成立するのはどのようなときか.

第　2　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

$AB = AC$，$BC = 2$である△ABCの外接円の面積をSとする．$AB = t$とするとき，次の問いに答えよ．

問1　Sをtを用いて表せ．

問2　$S \geqq \pi$を示せ．また，$S = \pi$となるときのtの値を求めよ．

第　3　問　（50点）（商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部）

$\triangle$ABC において辺 BC，CA，AB のそれぞれの長さを a，b，c とする．

$$K = 2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

とするとき，次の問いに答えよ．

問 1　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -a^2$ を示せ．

問 2　$K = -(a^2 + b^2 + c^2)$ を示せ．

問 3　$3K \leqq -(a + b + c)^2$ を示せ．また，この不等式において等号が成立するとき，$\triangle$ABC はどのような三角形か．

第　4　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

k は定数とする．$f(x)=2x^3+3kx^2-6x-2k$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする．次の問いに答えよ．

問1　$\alpha\beta$ の値を求めよ．また，$\alpha+\beta$ を k を用いて表せ．

問2　$f(x)$ を $\dfrac{1}{6}f'(x)$ で割った余りを求めよ．

問3　$f(\alpha)f(\beta)$ を k を用いて表せ．

問4　$f(x)=0$ は異なる3個の実数解をもつことを示せ．

第　1　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

次の問いに答えよ．

問１　a は実数とする．直線 $y=ax$ に関する対称移動を表す行列を求めよ．

問２　点Ｐを，直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ に関して対称移動し，さらに直線 $y=-3\sqrt{3}\,x$ に関して対称移動したときの点をＱとする．点Ｐを点Ｑに移す移動は，原点を中心とする回転であることを示し，その回転角を求めよ．

第　2　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

AB ＝ AC，BC ＝ 2 である△ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とする．AB ＝ t とするとき，次の問いに答えよ．

問 1　r を t を用いて表せ．

問 2　R を t を用いて表せ．

問 3　$\dfrac{r}{R}$ の値が最も大きくなるときの t の値と，そのときの $\dfrac{r}{R}$ の値を求めよ．

第　3　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

$\triangle$ABC において辺 BC，CA，AB のそれぞれの長さを a，b，c とする．

$$K = 2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$$

とするとき，次の問いに答えよ．

問 1　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -a^2$ を示せ．

問 2　$K = -(a^2 + b^2 + c^2)$ を示せ．

問 3　$3K \leqq -(a + b + c)^2$ を示せ．また，この不等式において等号が成立するとき，$\triangle$ABC はどのような三角形か．

第　4　問　(50点)　(理学部・工学部・医学部医学科)

e は自然対数の底とする．$f(x) = x(e - e^x)$ とし，曲線 $y = f(x)$ の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とする．$h(x) = g(x) - f(x)$ とおく．次の問いに答えよ．

問 1　$g(x)$ を求めよ．

問 2　$0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$h'(x) \leqq 0, \qquad h(x) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．

問 3　0 でない実数 a に対し，

$$\int_0^1 x^2 e^{ax}\, dx$$

を求めよ．

問 4　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，2 つの直線 $y = g(x)$，$x = 0$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．