前期日程用

平成18年度　大阪市立大学第２次試験

数　学　問　題

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で８ページである．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右２か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部の受験者は，１ページから４ページまでの問題，計４問を解答すること．

7　理学部・工学部・医学部医学科の受験者は，５ページから８ページまでの問題，計４問を解答すること．

8　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

9　問題冊子は持ち帰ること．

第　1　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

次の問いに答えよ.

問1　$x<y<z$ のとき，不等式

$$xy^2-x^2y+yz^2-y^2z+zx^2-z^2x>0$$

が成り立つことを示せ.

問2　$1<a<b<c$ のとき，不等式

$$\log_a\frac{c}{b}+\log_b\frac{a}{c}+\log_c\frac{b}{a}>0$$

が成り立つことを示せ.

第　2　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

$-1<t<1$ とし，xy 平面上に3点 $\mathrm{A}\,(-1,0)$，$\mathrm{B}\,(t,\ \sqrt{1-t^2})$，$\mathrm{C}\,(t,0)$ をとる．三角形 ABC を x 軸の周りに回転させて得られる円錐の側面積を $S\,(t)$ とする．次の問いに答えよ．

問1　$S\,(t)$ を求めよ．

問2　$S\,(t)^2$ が最大になる t を求めよ．

第　3　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

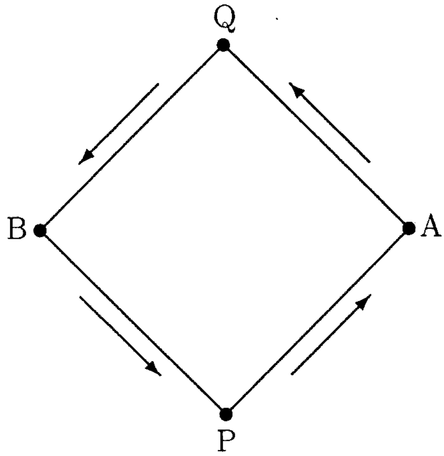
円 $x^2+(y-2)^2=1$ を C とし，放物線 $y=x^2$ の上に相異なる3点 A $(2,4)$，P (p,p^2)，Q (q,q^2) $(p<q)$ をとる．直線 AP，AQ がともに円 C に接するとき，次の問いに答えよ．

問1　$p,\ q$ を求めよ．

問2　直線 PQ が円 C に接することを示せ．

第　4　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

a，b 2人が，下の図のような正方形の上で次の規則に従って，ゲームを行う．



- まず最初は，aは頂点Aを出発点とし，bは頂点Bを出発点とする．
- 2人はそれぞれ硬貨を持ち，2人同時に各自の硬貨を投げて，表が出たときは，図の矢印の向きに隣の頂点に移動し，裏が出たときは，そのまま頂点にとどまることにする．
- このような硬貨投げを繰り返し行った結果，ある頂点で2人がいっしょになったとき，後から移動してきた方を勝ちとする．

次の問いに答えよ．

問1　2回目の硬貨投げの結果で勝負がつく確率を求めよ．

問2　2回目の硬貨投げの結果ではまだ勝負がつかず，3回目の硬貨投げの結果で勝負がつく確率を求めよ．

第　1　問　(50点)　(理学部・工学部・医学部医学科)

次の問いに答えよ.

問 1　$x \geqq 0$ のとき, 不等式

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1 + x) \leqq x$$

が成り立つことを示せ.

問 2　次の極限値

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

を求めよ.

第　2　問　(50点)　(理学部・工学部・医学部医学科)

次の問いに答えよ.

問 1　$x = \dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{3\pi}{5}$ のとき

$$\sin 2x = \sin 3x$$

が成り立つことを示せ.

問 2　等式

$$\sin 3x = (4\cos^2 x - 1)\sin x$$

を示せ.

問 3　$\cos\dfrac{\pi}{5}$，$\cos\dfrac{3\pi}{5}$ の値を求めよ.

問 4　区間 $\dfrac{\pi}{5} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{5}$ において，2 曲線 $y = \sin 2x$，$y = \sin 3x$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

第　3　問　(50点)　(理学部・工学部・医学部医学科)

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a^2 & 2a\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ p & q\end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

問 1　$B=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}$ について，$AP=PB$ が成り立っているものとする．このとき，P は逆行列をもたないことを示せ．

問 2　n を自然数とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．ただし E は 2 次の単位行列とする．

$$A^{n+1}=(n+1)\,a^n A - na^{n+1}E$$

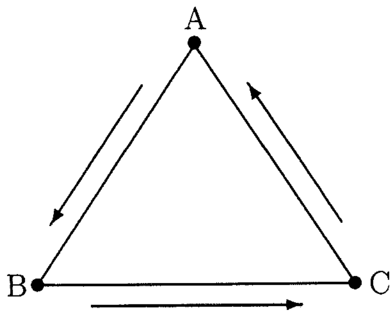
問 3　P は逆行列をもち，自然数 k に関して

$$P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}$$

が成り立つものとする．このとき，k は 2 以上で，$a=x=y=0$ であることを示せ．

第　4　問　(50点)　(理学部・工学部・医学部医学科)

a，b，c 3人がプレイヤーとなり，下の図のような三角形の上で次の規則に従って，ゲームを行う.



- まず最初は，aは頂点Aを出発点とし，bは頂点Bを，cは頂点Cを出発点とする.
- 各プレイヤーはそれぞれ硬貨を持ち，みな同時に各自の硬貨を投げて，表が出たときは，図の矢印の向きに隣の頂点に移動し，裏が出たときは，そのまま頂点にとどまることにする.
- この移動によって，ある頂点において2人がいっしょになったときは，前からとどまっていた方がこのゲームから抜けることにする．その後は，残った2人で同様のゲームを続けるものとする.
- このような硬貨投げを繰り返し行い，最後の1人になるまで残った者をこのゲームの優勝者とする.

n 回までの硬貨投げの結果では優勝者が決まらずに，三角形上に3人とも残っている確率を p_n，三角形上に2人が残っている確率を q_n とする．次の問いに答えよ.

問1　q_{n+1} を p_n と q_n を用いて表せ.

問2　$\dfrac{3}{2}p_{n+1}+q_{n+1}$ を p_n と q_n を用いて表せ.

問3　p_n と q_n を求めよ.

問4　n 回までの硬貨投げの結果では優勝者が決まらずに，$(n+1)$ 回目の硬貨投げの結果で優勝者が決まる確率を求めよ.