前期日程用

平成17年度　大阪市立大学第２次試験

数　学　問　題

注 意 事 項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で５ページである．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右２か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部の受験者は，１ページから２ページまでの問題，計４問を解答すること．

7　理学部・工学部・医学部医学科の受験者は，３ページから５ページまでの問題，計５問を解答すること．

8　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

9　問題冊子は持ち帰ること．

第　1　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

2つの関数 $y=1-x^2$, $y=\dfrac{1}{2}(x-b)^2$ のグラフが, 点 $\mathrm{A}(a,\ 1-a^2)$ において同一の直線に接するように, 正の定数 a, b を定める. 関数 $y=f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & (x \leqq a) \\ \dfrac{1}{2}(x-b)^2 & (x > a) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

問1　正の定数 a, b の値を求めよ.

問2　関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ.

第　2　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

数列 $\{a_n\}$ を条件

$$a_1=-1, \qquad a_{n+1}=\frac{1}{a_n}-1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める. この数列の初項から第 n 項までの積 $a_1a_2a_3\cdots a_n$ を x_n とするとき, 次の問いに答えよ.

問1　$x_n-x_{n+1}=x_{n+2}$ が成り立つことを示し, x_6, a_6 を求めよ.

問2　$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+x_{n+1}=-x_n$ が成り立つことを示せ.

問3　$x_2+x_4+x_6+\cdots+x_{2m}=-1-x_{2m+1}$ が成り立つことを示せ.

第　3　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

$a>0$ とし，xy 座標平面において，x 軸に平行な直線 $l:y=a$，および，放物線 $U:y=x^2$ を考える．次の問いに答えよ．

問1　点 $(0,\ s)$ を中心とする半径 r の円と放物線 U が，ただ一つの共有点を持つための s，r についての条件を求めよ．

問2　直線 l と放物線 U によって囲まれる領域（境界も含む）を D とする．D に含まれ，y 軸上に中心を持つ円のうちで，その半径 r が最大のものを求めよ．

第　4　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

n を2以上とし，n 組の夫婦が，$2n$ 人掛けの円卓に着席するものとする．着席位置を無作為に決めるとき，次の問いに答えよ．

問1　男女が交互に着席する確率を求めよ．

問2　どの夫婦も隣り合わせに着席する確率を求めよ．

問3　男女が交互になり，かつ，どの夫婦も隣り合わせに着席する確率を求めよ．

第　1　問　（40点）（理学部・工学部・医学部医学科）

実数を成分とする2次の正方行列のうち，その（1，1）成分，（2，2）成分が正で，(2，1）成分が0である行列の全体集合を $\mathbf{M}$ とする．E は2次の単位行列を表すものとして，次の問いに答えよ．

問1　A が集合 $\mathbf{M}$ に属するならば，$B(A+2E)=3A$ をみたす B で $\mathbf{M}$ に属するものがただ一つ存在することを示せ．

問2　2次の正方行列 $A_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad A_{n+1}(A_n+2E)=3A_n$$

によって定めるとき，A_n を n を用いて表せ．

第　2　問　（40点）（理学部・工学部・医学部医学科）

xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径1の円 $\mathbf{S}$ と，2点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ -2)$ を考える．$\mathbf{S}$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ に対し，直線 AP と x 軸との交点を $\mathrm{X_A}$，直線 BP と x 軸との交点を $\mathrm{X_B}$ とする．次の問いに答えよ．

問1　2点 $\mathrm{X_A}$，$\mathrm{X_B}$ の x 座標をそれぞれ θ を用いて表せ．

問2　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が $\mathbf{S}$ 上を動くとき，線分 $\mathrm{X_AX_B}$ の長さの最大値を求めよ．

第　3　問　(40点)（理学部・工学部・医学部医学科）

M を 2 以上の自然数とする．$\mathbf{N}$ を自然数全体の集合とし，$n \in \mathbf{N}$ について，集合

$$\mathbf{A}_n = \left\{ m \,\middle|\, m \in \mathbf{N},\ m \leqq \frac{M}{n} \right\}$$

の要素の個数を a_n とする．$S(M) = a_1 + a_2 + \cdots + a_M$ とおくとき，次の問いに答えよ．

問 1　不等式 $\displaystyle\sum_{n=2}^{M} \frac{M}{n} < S(M) \leqq \sum_{n=1}^{M} \frac{M}{n}$ が成り立つことを示せ．

問 2　関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の定積分を用いて，$\displaystyle\lim_{M \to \infty} \frac{S(M)}{M \log M} = 1$ であることを示せ．

第　4　問　(40点)（理学部・工学部・医学部医学科）

座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ \tan\theta,\ 0)$ をとる．座標空間の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ で表す．線分 OP 上に点 Q を $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1$ となるようにとり，$s = \mathrm{BQ}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

問 1　s を θ を用いて表し，線分の長さ AQ を s のみを用いて表せ．

問 2　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}$ であることを示せ．

問 3　$f(\theta) = \dfrac{1}{\mathrm{AP}}$ とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)\, d\theta$ を求めよ．

第 5 問 (40点) (理学部・工学部・医学部医学科)

座標平面上の原点Oを中心とする半径1の円S上に，異なる3点A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$，C$(c_1,\ c_2)$ がある．実数 α，β，γ を

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．点D$(d_1,\ d_2)$ を

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

で定め，線分AD，BCの中心をそれぞれM，Nとする．次の問いに答えよ．

問1　$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を示し，これを用いて，点Dが円S上にあることを示せ．

問2　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を α，β，γ を用いて示せ．

問3　2直線AD，BCは直交することを示せ．また，2直線AD，BCの交点をHとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

が成り立つことを示せ．