前期日程用

平成16年度　大阪市立大学第２次試験

# 数　学　問　題

**注意事項**

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で４ページである．解答用紙は４枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（４枚目は，左右２か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部の受験者は，１ページから２ページまでの問題，計４問を解答すること．

7　理学部・工学部・医学部医学科の受験者は，３ページから４ページまでの問題，計４問を解答すること．

8　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

9　問題冊子は持ち帰ること．

## 第　1　問　（50点）（商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部）

関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$（$p$, $q$ は定数）は，$x = a$，$x = b$（$0 < a < b$）で極値をとるとする．また，曲線 $y = f(x)$ 上の 3 点 O$(0, 0)$，A$(a, f(a))$，B$(b, f(b))$ に対して，∠AOB が $x$ 軸によって 2 等分されているものとする．

問 1　$\dfrac{f(a)}{a} = -\dfrac{f(b)}{b}$ を示せ．

問 2　$p^2 = 6q$ を示せ．

問 3　$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ．

## 第　2　問　（50点）（商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部）

実数 $a$, $b$, $c$ に対して

$$\begin{aligned} x &= a + b + c \\ y &= a^2 + b^2 + c^2 \\ z &= abc \\ w &= a^4 + b^4 + c^4 \end{aligned}$$

とおく．

問 1　$ab + bc + ca$ を，$x$, $y$ を用いて表せ．

問 2　$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ を，$x$, $y$, $z$ を用いて表せ．

問 3　$x = 1$，$z = 1$，$w = 35$ のとき，$y$ の値を求めよ．

## 第　3　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

2つの複素数

$$\alpha = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1,\quad \beta = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

の偏角 $\theta_1$，$\theta_2$ は，$0° < \theta_1 < 180° < \theta_2 < 360°$ をみたすものとする．ただし，$i$ は虚数単位を表す．

問1　$\alpha + 1$ を極形式で表せ．

問2　$\dfrac{1}{\alpha + 1}$ の実部の値を求めよ．

問3　$\dfrac{\alpha + 1}{\beta + 1}$ の実部が 0 に等しいことは，$\beta = -\alpha$ であるための必要十分条件であることを示せ．

## 第　4　問　(50点)　(商学部・経済学部・医学部看護学科・生活科学部)

1個のさいころを投げ，出た目が3か6のとき持ち点に1を加え，それ以外のときは1だけ減らすことを繰り返すゲームをする．はじめの持ち点を2とし，持ち点が0または $n$ になればゲームは終了するものとする．

問1　$n = 3$ とする．ちょうど5回投げたときに，ゲームが終了する確率を求めよ．

問2　$n = 4$ とする．ちょうど6回投げたときに，ゲームが終了する確率を求めよ．

## 第　1　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

自然数 $n$ に対して

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

とおく．ただし，$e$ は自然対数の底である．

問1　次の関係式が成り立つことを示せ．

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

問2　次の等式を示せ．

$$I_n = \frac{n!}{e}\left( e - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

## 第　2　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

$x > 0$ の範囲で，関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

を考える．

問1　$f(x)$ は，$0 < x \leqq \pi$ において減少することを示せ．

問2　$n$ を自然数とする．$f(x)$ が極小値，極大値をとる $x$ のうちで，

$$(2n-1)\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$$

をみたすものが，それぞれちょうど1つずつ存在することを示せ．

問3　$f(x)$ が極値をとる $x$ の値を小さい方から順に，

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots \quad (0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots)$$

とするとき，

$$\lim_{n \to \infty} \cos x_n = 0$$

を示せ．

## 第　3　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

2次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$s=-(a+d)$，$t=ad-bc$ とおく．

$P=\begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix}$ について，$AP=P\begin{pmatrix} 0 & -t \\ 1 & -s \end{pmatrix}$ となるための必要十分条件は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

であることを示せ．

## 第　4　問　（50点）（理学部・工学部・医学部医学科）

$xy$ 平面上の3点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ -t)$，B$(0,\ -t)$ $\left(0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ に対し，$y$ 軸上に B，O，C，D の順に並ぶ点 C，D を

$$\angle \mathrm{BAO}=\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{CAD}$$

となるようにとる．また，線分 BA 上の点 E を

$$3\angle \mathrm{BDE}=\angle \mathrm{BDA}$$

となるようにとる．

問1　直線 AC の方程式を求めよ．

問2　直線 DE の方程式を求めよ．

問3　直線 AC と直線 DE の交点を P$(x_1,\ y_1)$ とするとき，$\dfrac{y_1}{x_1}$ の値を求めよ．