第　1　問 (50点) (商・経済・生活科学部)

実数 a, b に対し，x についての 2 次方程式 $x^2 - 2ax + b = 0$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に少なくとも一つ実数解をもつとする．このとき，a, b がみたす条件を求め，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ．

第　2　問　（50点）（商・経済・生活科学部）

自然数 n に対して，$a_n = 2^n + 1$ とする．

問 1　すべての自然数 m に対して，$a_{3m+1} - a_1$ は 7 で割り切れることを証明せよ．

問 2　a_n を 7 で割った余りを求めよ．

第　3　問　（50点）（商・経済・生活科学部）

$a \geqq 0$ とする.

問 1　$S(a)=\int_0^1 |x^2-2(a+1)x+a^2+2a|dx$ を求めよ.

問 2　$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ.

第　4　問 (50点) (商・経済・生活科学部)

複素数平面において，点 $P(z)$ を原点 O のまわりに $\theta\,(0° < \theta < 180°)$ だけ回転し，さらに点 $E(1)$ のまわりに θ だけ回転した点を $Q(w)$ とする．このとき，点 $Q(w)$ は点 $P(z)$ をある点 $A(\alpha)$ のまわりに 2θ だけ回転した点と一致する．ただし，回転はすべて反時計まわりとする．

複素数 γ を

$$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$$

とする．

問１　複素数 w を z と γ を用いて表せ．

問２　複素数 α を γ を用いて表せ．

問３　三角形 OEA が正三角形となるような θ の値を求めよ．

第　1　問 （50点）（理・工・医学部）

正の実数 x に対して，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする．

問 1　関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

問 2　自然数 a，b で，$a<b$ かつ $a^b=b^a$ となるものをすべて求めよ．

第　2　問　(50点)　(理・工・医学部)

空間に4点 A$(-2,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 2)$, D$(2,\ -1,\ 0)$ がある．3点 A, B, C を含む平面を T とする．

問1　点 D から平面 T に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

問2　平面 T において，3点 A, B, C を通る円 S の中心の座標と半径を求めよ．

問3　点 P が円 S の周上を動くとき，線分 DP の長さが最小になる P の座標を求めよ．

第　3　問 (50点) (理・工・医学部)

p, q は正の有理数で, $\sqrt{q}$ は無理数であるとする. 自然数 n に対し, 有理数 a_n, b_n を

$$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$$

によって定める.

問 1　$(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示せ.

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$ を示せ.

第　4　問　(50点)　(理・工・医学部)

実数 a, b と自然数 n に対して

$$I_n = \int_0^{2\pi} (a\cos x + b\sin x)^{2n}\,dx$$

$$J_n = \int_0^{2\pi} (\sin x)^{2n}\,dx$$

とおく.

問 1　$I_n = (a^2 + b^2)^n J_n$ を示せ.

問 2　J_n と J_{n-1} $(n \geqq 2)$ の関係式を求め, I_n を求めよ.