

第 1 問 (50点) (理・工・医学部)

次の極限が有限の値となるように定数 a, b を定め、そのときの極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - 8x + 7 \cos 2x} - (a + bx)}{x^2}$$

第 2 問 (50点) (理・工・医学部)

関数 $f(x) = axe^{-x} + b$ に対して, 曲線 $C: y = f(x)$ を考える. ただし, a, b は定数で, e は自然対数の底である. 曲線 C は点 $P(2, -1)$ を通り, この点において C と楕円 $x^2 + 2y^2 = 6$ とは共通接線 $l: y = g(x)$ を持つとする. 次の問いに答えよ.

問1 a, b の値および $g(x)$ を求めよ.

問2 $x < 2$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを示せ.

問3 $0 \leq x \leq 2$ の範囲で, 曲線 C と直線 l および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

第 3 問 (50点) (理・工・医学部)

空間内に4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$ がある.
線分 AB の中点を D とし, 線分 OC の中点を E とする. 線分 OA 上に点 $P(p, 0, 0)$
($0 < p < 2$) をとり, 平面 PDE と線分 BC の交点を Q とする. 次の問いに答えよ.

問1 点 Q の座標を p を用いて表せ.

問2 線分 PQ の中点は, 直線 DE 上にあることを示せ.

問3 四角形 $PDQE$ の面積を p の式で表せ.

第 4 問 (50点) (理・工・医学部)

実数を成分とする 2 次の正方行列 A , X と $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, $JA = AX$ が成立しているとする. 次の問いに答えよ.

問1 A が逆行列を持つとき, $X^2 + E = O$ であることを示せ. ただし, E は単位行列, O は零行列を表す.

問2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のとき, $A'JA$ および $A'J^2A$ を計算せよ.

問3 A が逆行列を持たないとき, $A = O$ であることを示せ.