平成 22 年度学力検査問題

医学部・前期日程

数　　学

② (数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B, 数学 C)

問　　題	1 ページ ～ 2 ページ	
解答用紙枚数	2　枚	
解答時間	2時間	

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙２枚の指定された欄２箇所(計４箇所)に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

$\boxed{1}$ $a,\ p$ を実数とし a は $|a| \leqq 1$ を満たすものとする。

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & (x \leqq a) \\ -a^2+3 & (x > a) \end{cases}$$

とし，C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする。また l を $y=px+p+2$ で定まる直線とする。

(1) 直線 l は p によらず，定点を通ることを示せ。また l が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような p を求めよ。

(2) C と l が相異なる 2 点のみを共有するような p の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ。

$\boxed{2}$ 四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\sqrt{5}$, $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=5$, $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\sqrt{30}$, $\mathrm{BC}=5\sqrt{2}$ を満たすものとする。辺 OB を $2:1$ に外分する点を D，辺 OC を $3:2$ に外分する点を E とする。O から直線 DE に引いた垂線と直線 BC との交点を F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 線分 OF の長さと線分 AF の長さおよび $\cos\angle\mathrm{OFA}$ の値を求めよ。

◇M7(868—92)

3 k は正の定数とし，$f(x)=e^{k\sin x}\cos x$ とする。曲線 C を，$y=f(x)$ のグラフの $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ に対応する部分とする。

(1) t の関数 $g(t)$ は，$f'(x)=e^{k\sin x}g(\sin x)$ を満たすものとする。このとき $g(t)$ を求め，さらに $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲における $g(t)=0$ の解を求めよ。

(2) $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において $f(x)$ が最大となるときの $f(x)^2$ の値を求めよ。

(3) 曲線 C と x 軸に囲まれた部分の面積を求めよ。

4 X を 2 次の正方行列として以下の問いに答えよ。

(1) $p,\ q$ を実数とし $q\neq 0$ とする。$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ならば，X は $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形で表せることを示せ。

(2) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ のとき，自然数 n に対し $X^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法により示せ。ただし $a^0=1$ とする。

(3) $m,\ n$ を自然数とする。X の各成分は 0 以上の整数で，さらに $X^{n+1}-X^n=\begin{pmatrix} 2^{m+1} & 2^{50} \\ 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix}$ を満たすものとする。このような行列 X が存在するような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。