平成 21 年度学力検査問題

医学部・前期日程

数　　学

② （数学Ⅰ　数学Ⅱ　数学Ⅲ　数学A　数学B　数学C）

問　　題	1 ページ ～ 2 ページ
解答用紙枚数	2 枚
解答時間	2時間

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙２枚の指定された欄**２箇所**(**計４箇所**)に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

1 $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$ を実数とする。

(1) 2 次不等式 $ax^2+bx+c \geqq 0$ の解が $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような $a,\ b,\ c$ を求めよ。ただし，$|b|=1$ とする。

(2) θ に関する不等式 $\alpha\sin\theta\tan\theta+\beta\cos\theta+\tan\theta \geqq 0$ の，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲での解が $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ となるような $\alpha,\ \beta$ を求めよ。

2 以下の問に答えよ。

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)P$ を満たす $x,\ y,\ z$ についての整式 P を求めよ。

(2) 0 以上の数 α, β, γ に対し，その相加平均 $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ が相乗平均 $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ 以上になることを示せ。

(3) x の方程式 $x^3-(3+\cos\theta)x^2+(3-\cos\theta)x-1=0$ の解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ がすべて正であるような θ を求め，そのときの方程式を解け。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

3 O, P, Q を，それぞれの座標が $(0,\ 0)$, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(-1,\ 0)$ で与えられる平面上の点とする。また，$0 \leqq \theta < \pi$ として，点 P, Q を通る直線と，y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ t)$ とする。このとき以下の問に答えよ。

(1) $\angle\mathrm{RQO}$ を θ で表せ。また t を θ の関数として表せ。

(2) Q, R を通る直線の方程式を t を用いて表せ。この直線と，O を中心とする半径 1 の円との交点を t を用いて表せ。また $\cos\theta$, $\sin\theta$ を t で表せ。

(3) θ を t の関数と見たとき，$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ となることを示せ。

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\theta-\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ。

4 行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

とおく。このとき次の問に答えよ。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき A^2, B^2, AB, BA を求めよ。

(2) (1) の A, B に対して $X = aA + bB$ を満たす定数 a, b を求めよ。

(3) 正の整数 n に対し，X^n を求めよ。

(4) $X + X^2 + X^3 + \cdots$ を求めよ。