平成 20 年度学力検査問題

医学部・前期日程

数　　学

②
数　学　Ⅰ
数　学　Ⅱ
数　学　Ⅲ
数　学　A
数　学　B
数　学　C

問　　題	1 ページ ～ 2 ページ
解答用紙枚数	2 枚
解答時間	2 時間

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は，上記のとおりである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙 2 枚の指定された欄 **2 箇所(計 4 箇所)**に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

1 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ とし，曲線 $y=f(x)$ 上に点 $\mathrm{P}(a,f(a))$ をとる。ただし $a>-1$ とする。P におけるこの曲線の接線を l とし，P を通って x 軸に垂直な直線を m とする。また m 上の点 $(a,0)$ を l に関して対称に移動した点を Q とし，2 点 P, Q を通る直線を n とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 直線 l,m の間の角を θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とするとき，直線 l,n のそれぞれの傾きを θ の関数として表せ。

(2) 直線 l,n の方程式を a を用いて表せ。

(3) 直線 n が a の値によらないある定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ。

2 3 次方程式 $x^3-5x^2+6x-2=0$ の最小解を α，最大解を β とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) α,β の値を求めよ。

(2) 数列 $\{p_n\},\{q_n\}$ は $p_1=0, q_1=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ を満たし，すべての自然数 n について

$$p_{n+1}=2p_n+q_n,\quad q_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n$$

を満たすとする。このときすべての自然数 n に対し次の等式が成立することを示せ。

$$p_n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-1},\quad q_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-2}$$

(3) すべての自然数 n に対し次の数 r_n は有理数であることを証明せよ。

$$r_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{k}$$

3 曲線 $C: y=\log\frac{x}{e}$ 上の点 $(e^2, 1)$ における接線を l とするとき，以下の問いに答えよ。ただし対数は自然対数とする。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 次の定積分 I_1, I_2 の値を求めよ。

$$I_1=\int_1^e \log x\,dx,\quad I_2=\int_1^e (\log x)^2 dx$$

(3) 曲線 C, 接線 l および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。ただし行列やベクトルの成分はすべて実数であるとする。

(1) 0 でない f に対し $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおく。このとき $|a|=|b|$ で $|s|<|t|$ となるような a, b が存在することを示せ。

(2) 任意の実数 x, y に対して不等式 $|x+y| \geqq |x|-|y|$ が成立することを示せ。次に $|g| \geqq 2$ を満たす g に対し $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおくとき，$|s|<|t|$ ならば $|u|>|v|$ であることを示せ。さらに $|h| \geqq 2$ を満たす h に対し $\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくとき，$|u|>|v|$ ならば $|s'|<|t'|$ であることを示せ。

(3) $2n+1$ 個の実数 $f, g_1, h_1, \cdots, g_n, h_n$ において $f \neq 0$ であり，すべての $j=1, \cdots, n$ に対し $|g_j| \geqq 2, |h_j| \geqq 2$ であるとする。このとき積

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$$

について $A \neq E$ を示せ。ただし E は 2 次単位行列を表す。