

# 平成 19 年度学力検査問題

医・工学部・前期日程

## 数 学

②  $\left( \begin{array}{l} \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \end{array} \begin{array}{l} \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \end{array} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \right)$

問 題	ページ	ページ
	1	~ 2
解答用紙枚数	2	枚
解 答 時 間	2	時間

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は、上記のとおりである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙 2 枚の指定された欄 2 箇所(計 4 箇所)に、忘れずに本学の受験番号を記入すること。
4. 解答は、すべて別紙解答用紙のそれぞれの解答欄に記入すること。
5. 配布された問題冊子は、試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は、草稿用紙として使用してよい。

1

$0 < k < 1$  を満たす実数  $k$  に対し、点  $O$  を原点とする座標平面上に 3 点

$$A(1, 0), B(k^2, k\sqrt{1-k^2}), C(4k^3 - 3k, (4k^2 - 1)\sqrt{1-k^2})$$

をとる。ベクトル  $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  のなす角を  $\alpha$  とし、 $\vec{OB}$  と  $\vec{OC}$  のなす角を  $\beta$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\cos \alpha$  と  $\cos \beta$  を  $k$  で表し、 $\alpha$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2)  $k$  が  $0 < k < 1$  の範囲を動くとき、 $\beta$  を  $\alpha$  で表せ。
- (3) 2 点  $O, B$  を通る直線と線分  $AC$  との交点を  $D$  とするとき、点  $D$  は線分  $AC$  を  $1:2$  に内分しないことを示せ。

2

自然数  $d, n$  ( $n \geq 2$ ) が与えられているとき、係数  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$  を用いて

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

と表されている  $x$  の  $m$  次多項式  $f(x)$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  が条件  $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right) = n^{1-d} f(x)$  を満たすならば、 $f(x)$  は  $d$  次式であることを示せ。
- (2) 条件  $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$  を満たし、 $f(1) = \frac{1}{6}$  となる  $f(x)$  を求めよ。

3  $m$  を整数で  $m \geq 0$  とする。  $x$  の関数  $I_m(x)$  ( $x > 0$ ) を

$$I_m(x) = \int_1^x t^2 (\log t)^m dt$$

により定める。ただし、 $\log t$  は  $e$  を底とする自然対数である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $I_m(x)$  と  $I_{m-1}(x)$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2)  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $I_2(x)$  を求めよ。
- (3)  $x$  の関数  $f(x) = I_2(x) - I_1(x)$  の区間  $1 \leq x \leq e^2$  での最大値と最小値を求めよ。

4 3 次の正方行列  $A, E$  を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $(A - aE)^2$  の  $(1, 1)$  成分,  $(1, 2)$  成分を求めよ。ただし、 $a$  は実数とする。
- (2)  $(A - aE)^2 = b(A - aE)$  を満たす正の実数  $a, b$  が存在するならば、そのような組  $(a, b)$  を求めよ。
- (3)  $A^{2007} - 3A^{2006} + 2A^{2005} + A + E$  を求めよ。