1 a を実数の定数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<-2) \\ -x^2-2x & (-2\leqq x<0) \\ x & (x\geqq 0) \end{cases}$$

$$g(x)=-2(a+1)x+a^2$$

(1) どのような a に対しても，方程式 $-x^2-2x=g(x)$ の解は1つしか存在しないことを示し，その解を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=g(x)$ が異なる3つの解をもつような a の範囲を求めよ。

(3) (2)の3つの解を α，β，γ とするとき，$\dfrac{a^6}{\alpha\beta\gamma}$ を最大にする a の値を求めよ。

2 複素数 z に対し，その共役複素数を $\bar{z}$ で表す。

(1) $z = x + yi$（x，y は実数）は 0 でない複素数とする。$2z + i\bar{z}$ が z の実数倍であるとき，y を x を用いて表せ。

(2) z_1 は実部が 1 で $2z_1 + i\bar{z}_1$ が z_1 の実数倍となる複素数とする。このような各 z_1 に対し，漸化式

$$z_n = 2z_{n-1} + i\bar{z}_{n-1} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

によって定義される数列 $\{z_n\}$ の一般項を z_1 を用いて表せ。

(3) $w_1 = 3 + i$ であるとき，漸化式

$$w_n = 2w_{n-1} + i\overline{w}_{n-1} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

によって定義される数列 $\{w_n\}$ の一般項を求めよ。

3 (1) 無限等比級数

$$1-\left(\frac{1}{2}x^2-x-1\right)+\left(\frac{1}{2}x^2-x-1\right)^2-\left(\frac{1}{2}x^2-x-1\right)^3+\cdots$$

が収束するような x の範囲を定めよ。また，そのときの和を求めよ。

(2) (1)の級数の和を $f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int f\left(3+\frac{1}{5}\cos\theta\right)\sin\theta\,d\theta$ を求めよ。

4 E は2次の単位行列，O は2次の零行列とする。

(1) 2次の行列 B が $B^2 = O$ を満たすとき，$A = E + B$ とすれば

$$A^n = E + nB \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

(2) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^{2001}$ を計算せよ。

(3) p, q を正の整数とするとき，

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}^p + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} 38 & 18 \\ -72 & -34 \end{pmatrix}$$

を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。