数　　学

〔理学部（数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・地球科学プログラム）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 3辺の長さがそれぞれ2, 4, $2\sqrt{5}$ である三角形に内接する円の面積を求めよ。

(2) $\theta=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ とする。有理数を係数とする4次の整式 $f(x)$ のうち, $f(\theta)=0$ を満たし4次の項の係数が1となるものを1つ答えよ。

(3) 1個のサイコロを3回投げるとき, 出る目の和が7以上である確率を求めよ。

2 座標平面上の2点 A$(0, 0)$, B$(0, 5k)$ および放物線

$$C: \quad y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$$

を考える。ただし, k は正の定数とする。

(1) 点Pが A, Bからの距離の比が3：2の点をすべて動くとき, Pの軌跡を求めよ。

(2) (1)の軌跡と放物線 C の共有点の個数がちょうど2になるような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$, $\boxed{3-2}$, $\boxed{3-3}$ から1題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 自然数 n に対して，a_n，b_n を

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$$

を満たす有理数とする。ただし，4つの有理数 a, b, c, d が

$$a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$$

を満たせば $a = c$ かつ $b = d$ が成り立つので，a_n，b_n は各自然数 n に対し1通りに定まることに注意する。

(1) n が3の倍数であるとき，a_n，b_n がともに整数となることを示せ。

(2) 自然数 n が3の倍数であるとき，a_n，b_n のどちらか一方が偶数で他方が奇数となることを示せ。

(3) a_n，b_n がともに整数となるのは n が3の倍数のときに限ることを示せ。

3 — 2 空間に異なる4点P，A，B，Cがあり，次の条件が満たされているとする。

- 三角形PABは1辺の長さが1の正三角形である。
- 線分PAと線分PCは正六角形の隣り合う2辺である。この正六角形をαとおく。
- 線分PBと線分PCはαとは異なる正六角形の隣り合う2辺である。この正六角形をβとおく。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，および$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を求めよ。

さらに，次の条件を満たすような異なる3点H，Q，Rを考える。

- Hは線分PA上にある。
- Qは3点P，A，Bによって定まる平面を直線PAで2分割した領域のBを含む側にあり，線分HQは長さ1でPAに垂直である。
- Rは正六角形αの内部にあり，線分HRは長さ1でPAに垂直である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を用いてあらわせ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HR}}$のなす角を$\theta$とするとき$\cos\theta$を求めよ。

3 — 3 袋に赤玉4個と白玉2個が入っている。無作為に玉を1個取り出して，それが赤玉であれば白玉と，白玉であれば赤玉と取り換えて袋に戻すという操作を考える。この操作を2回繰り返したあと袋にある赤玉の数をXとし，一方，3回繰り返したあと袋にある白玉の数をYとする。

(1) 確率$P(X=4)$を求めよ。

(2) 確率変数Xの期待値$E(X)$と分散$V(X)$を求めよ。

(3) 確率変数Yの期待値$E(Y)$を求めよ。

4 $x > 0$ で定義された曲線

$$C: \quad y = (\log x)^2$$

を考える。

(1) a を正の実数とするとき，点 $\mathrm{P}(a, (\log a)^2)$ における曲線 C の接線 L の方程式を求めよ。

(2) $a > 1$ のとき，接線 L と x 軸の交点の x 座標が最大となる場合の a の値 a_0 を求めよ。

(3) a の値が (2) の a_0 に等しいとき，直線 L の $y \geqq 0$ の部分と曲線 C と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる図形の体積を求めよ。

5 次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) z_1，z_2 を異なる 2 つの複素数とするとき，$\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} \neq \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$ となることを示せ。ただし，$z_1 \neq -i$，$z_2 \neq -i$ とする。

(2) w を i 以外の複素数とするとき，$\dfrac{1+iz}{z+i} = w$ かつ $z \neq -i$ を満たす複素数 z が存在することを示せ。

(3) $-i$ 以外の複素数 z について，z の虚部が b となることと，$w = \dfrac{1+iz}{z+i}$ が $\left| w - \dfrac{i}{2} \right| = \dfrac{1}{2}$ を満たすことが同値になるように実数 b を定めよ。