数　学

〔理学部(数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・地球科学プログラム)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は, $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は, $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから, 解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら, まず, 掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が, 自分に配付された数と合っているか確認し, もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に, 解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し, 学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから, 解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は, 必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし, <u>裏面には決して記入しないこと</u>。
8. 解答は, 論証および計算の進め方がはっきり分かるように, 順序よく的確に表現すること。また, 文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) AB = 5, BC = 9, CA = 6 である三角形 ABC を考える。頂点 A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さを求めよ。

(2) $ab = 4a - b$ を満たす正の整数 a, b の組をすべて求めよ。

(3) 正 $2n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_{2n-1}A_{2n}$ の異なる3つの頂点を結んで三角形を作る。このような三角形の作り方は何通りあるか。なお，頂点が異なれば異なる三角形であるとする。またこのような三角形を任意に選ぶとき，それが直角三角形となる確率 p を求めよ。ただし，$n \geqq 2$ とする。

2 次の各問いに答えよ。

(1) a, b, c が1でない正の実数のとき，次の等式が成立することを証明せよ。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) $s = \log_{10}2$, $t = \log_{10}3$ とするとき，$\log_{30}600$ を s と t を用いて表せ。

(3) 次の関数の最大値と最小値を求めよ。またそのときの x の値を求めよ。

$$y = 2(\log_5 x)^2 - \log_5 x^8 + 6 \quad (1 \leqq x \leqq 125)$$

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$, $\boxed{3-2}$, $\boxed{3-3}$ から1題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 各項が正となる数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1}a_{n-1} = a_n{}^2 + 1 \quad (n \geqq 2)$$

を満たすとする。

(1) a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2) c を実数とする。3以上のすべての自然数 n に対して

$$(a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} = a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2})$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 3以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

が成り立つことを証明せよ。

3 — 2 平行六面体 OAFB-CEGD を考える。t を正の実数とし，辺 OC を $1 : t$ に内分する点を M とする。また三角形 ABM と直線 OG の交点を P とする。さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。

(2) 四面体 OABE の体積を V_1 とし，四面体 OABP の体積を V_2 とするとき，これらの比 $V_1 : V_2$ を求めよ。

(3) 三角形 OAB の重心を Q とする。直線 FC と直線 QP が平行になるとき，t の値を求めよ。

3 — 3 大小 2 個のサイコロを同時に投げる。大きいサイコロの出る目を十の位，小さいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を X とし，小さいサイコロの出る目を十の位，大きいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を Y とする。

(1) 確率 $P(X - Y > 0)$ を求めよ。

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

(3) 確率変数 $X - Y$ の標準偏差 $\sigma(X - Y)$ を求めよ。

4 次の各問いに答えよ。

(1) 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

(2) $a > 0$ のとき，次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx < \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(3) 次の不等式が成立することを示せ。

$$\frac{\pi}{4} < \log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

5 曲線 C の媒介変数表示が

$$x = \cos^3 t, \qquad y = 3\sin^3 t \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられているとする。また曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ 3\sin^3 t)$ における接線を ℓ とする。さらに原点を中心とする半径 r の円が直線 ℓ と接しているとする。

(1) 直線 ℓ の方程式は

$$y = -3(\tan t)x + 3\sin t$$

と表されることを示せ。

(2) $a = \cos^2 t$ とするとき，r^2 は

$$r^2 = \frac{9a(a-1)}{8a-9}$$

と表されることを示せ。

(3) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ における r の最大値を求めよ。またそのときの t の値を求めよ。