数　学

〔理学部(数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・地球科学プログラム)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し，学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，<u>裏面には決して記入しない</u>こと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) p, q を実数とする。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が異なる解 α, β をもつとき，$\dfrac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$ を p, q を用いて表せ。

(2) 斜辺の長さが一定の直角三角形のうち，面積が最大のものは，直角二等辺三角形であることを示せ。

(3) $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\cos 1$ という 4 つの数値を小さい方から順に並べよ。ただし，1, 2, 3 は，それぞれ 1 ラジアン，2 ラジアン，3 ラジアンを表す。

$\boxed{2}$ $0 < a < 1$ とする。このとき，次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = x^3 + 3\left(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a} + \log_{\frac{1}{8}}4\right)x^2 - 4\left(\log_{\frac{1}{4}}a\right)x - 4\left(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a}\right)^3$$

(1) $b = \log_{\frac{1}{4}}a$ とおく。関数 $f(x)$ を，対数が現れない形で，b を用いて表せ。

(2) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。

(3) $f(x)$ の極大値が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。このとき，a の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$，$\boxed{3-2}$，$\boxed{3-3}$ から1題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 2,\quad (n+1)a_{n+1} = (n+3)a_n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ とするとき，$b_{n+1} - b_n$ を n を用いて表せ。

(2) 次の等式が k についての恒等式となるように，定数 p の値を定めよ。

$$\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)} = \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)} - \frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3-2}$ 平面上の三角形ABCは $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ の三角形で，$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{AC} = 8$ とする。$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺BCの交点をDとし，$\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線と辺ACの交点をEとする。

(1) 辺BCの長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(3) 線分ADと線分BEの交点をIとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

3 — 3　1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードを袋の中に入れる。この袋の中から 2 枚のカードを同時に抜き出し，それらのカードの数の大きい方を X, 小さい方を Y とする。

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2) 確率変数 X と Y は互いに独立であるか，独立でないか，答えよ。

(3) 確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ を求めよ。

4 実数全体で微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \int_0^x e^t f(t)\,dt\right)$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底とし，以下では，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよいものとする。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，グラフの概形をかけ。

(3) $a > 0$ とする。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 1$，$x = 0$ および $x = a$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ。

5 α は複素数，A は実数で $|\alpha|^2 - A > 0$ を満たすものとする。複素数 z に関する方程式

$$|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + A = 0$$

を(★)とする。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{z}$ はそれぞれ α，z の共役複素数とする。

(1) (★)は円を表す方程式であることを示せ。また，この円の中心および半径を α と A を用いて表せ。

(2) 複素数平面上の 0 でない異なる 2 点 z_1，z_2 が $z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0$ を満たすならば，3 点 0，z_1，z_2 は同一直線上にあることを示せ。ただし，$\overline{z_1}$，$\overline{z_2}$ はそれぞれ z_1，z_2 の共役複素数とする。

(3) 複素数平面上の異なる 3 点 0，z_1，z_2 は同一直線上にないものとする。3 点 0，z_1，z_2 を通る円が(★)で表されるとき，A の値を求め，さらに α を z_1 と z_2 を用いて表せ。