令和5年度入学者選抜学力検査問題(前期日程)

数　　学

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

(医学部医学科)

(注　意)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は4ページ，解答用紙は4枚である。
   指示があってから確認すること。
3. 解答はすべて解答用紙の指定のところに記入すること。
   解答用紙の表面だけで書ききれない場合は，裏面の下半分を使用することができる。
4. **解答用紙は持ち帰ってはならないが**，問題冊子は必ず持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 箱Aの中に赤球6個と白球n個の合計$n+6$個の球が入っている。箱Bの中に白球4個の球が入っている。ただし，nは自然数とし，球はすべて同じ確率で取り出されるものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 箱Aから同時に2個の球を取り出すとき，赤球が1個と白球が1個取り出される確率をp_nとする。p_nが最大となるnと，そのときのp_nの値を求めよ。

(2) 箱Aから同時に2個の球を取り出し箱Bに入れ，よくかき混ぜた後で箱Bから同時に2個の球を取り出すとき，赤球が1個と白球が1個取り出される確率をq_nとする。$q_n < \frac{1}{3}$となるnの最小値を求めよ。

〔Ⅱ〕 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である θ が $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta=0$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) (1)で求めた $\cos\theta$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(2\cos\theta)^n+(1-2\cos\theta)^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定める。このとき，a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ。

(3) (2)で定めた数列 $\{a_n\}$ について，$(-1)^n\{a_n a_{n+2}-(a_{n+1})^2\}$ は n によらない定数であることを示せ。

〔Ⅲ〕 xy 平面上において，曲線 $C : y=\sqrt{x}$ と，直線 $\ell : y=x$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{x})\ (0 \leqq x \leqq 1)$ に対し，点 P から直線 ℓ に下ろした垂線と，直線 ℓ との交点を Q とする。線分 PQ の長さを x を用いて表せ。

(3) C と ℓ で囲まれる図形を直線 ℓ の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ。

〔Ⅳ〕 負でない整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ と正の実数 $x > 0$ に対し，

$$I_n = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) I_0, I_1 を求めよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。

(3) I_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ。