2023年度　入学試験問題（前期日程）

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

試験時間　120分

理工学部：数学物理学科（数学受験）・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子　　　問題……$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　　ページ……1～2

解答用紙……4枚

下書用紙……1枚

配　　点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の0.75倍とする。

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

$\boxed{1}$ nを正の偶数とし，$f(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$とする。さらに，$g(x)=f(x)e^{-x}$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) 導関数$g'(x)$を求めよ。

(2) $x<0$のとき，$g(x)>1$であることを示せ。

(3) 方程式 $f(x)=0$は実数解をもたないことを示せ。

$\boxed{2}$ 集合Aを次で定義する。

$$A=\{m^2-n^2 \mid m\text{ と }n\text{ は整数}\}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) 7はAの要素であることを証明せよ。

(2) 6はAの要素ではないことを証明せよ。

(3) 奇数全体の集合はAの部分集合であることを証明せよ。

(4) 偶数aがAの要素であるための必要十分条件は，ある整数kを用いて$a=4k$とかけることであることを証明せよ。

$\boxed{3}$ d, r は実数で, $r > 0$ とする。数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 2$ で公差が d の等差数列とする。数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 4$ で公比が r の等比数列とする。さらに, 数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \begin{cases} a_n & (a_n \geqq b_n \text{ のとき}) \\ b_n & (a_n < b_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $c_3 = c_4 = 3$ となるような d, r を求めよ。

(2) $d = -\dfrac{1}{64}$, $r = \dfrac{1}{2}$ のとき, $c_n = a_n$ を満たす最大の n を求めよ。

(3) $d = 9$, $r = 2$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) すべての実数 x に対して

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

が成り立つことを, 加法定理と 2 倍角の公式を用いて示せ。

(2) 実数 θ を, $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ と $\cos 3\theta = -\dfrac{11}{16}$ を同時に満たすものとする。このとき, $\cos\theta$ を求めよ。

(3) (2) の θ に対して, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} \sin^5 x\, dx$ を求めよ。