2022年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間　120分

理工学部：数学物理学科(数学受験)・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子　　　**問題**……$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　**ページ**……1～2

解答用紙……4枚

下書用紙……1枚

配　点……**理工学部は表示のとおり。医学部は表示の0.75倍とする。**

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 5$，および，すべての自然数 n に対して，

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 4$$

をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して，$b_n = a_{n+1} - a_n$ で数列 $\{b_n\}$ を定義する。一般項 b_n を求めよ。

(3) 一般項 a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $1 \leqq p \leqq 8$，$1 \leqq q \leqq 8$，$|p - q| > 2$ を同時にみたす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，整数 p と q は，$1 \leqq p \leqq n$ と $1 \leqq q \leqq n$ をみたすとする。さらに，p と q の少なくとも一方が $\dfrac{n}{2}$ 以上であるような整数の組 $(p,\ q)$ の個数 a_n を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$1 \leqq p \leqq n$，$1 \leqq q \leqq n$，$p^2 + q^2 \leqq n^2$ を同時にみたす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を b_n とする。このとき，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{\pi}{4}$$

となることを示せ。

3 a と b は実数とし，次の方程式を考える。

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$|z-(\sqrt{3}+i)|=1$ をみたす複素数平面上の点 z からなる図形を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

（100 点）

(1) 方程式①の 1 つの解の偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ となるときの a と b の条件を求めよ。さらに，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。

(2) 方程式①の解の 1 つに対応する複素数平面上の点が C 上にあるとする。その解の絶対値が最大となるときの a と b を求めよ。

(3) 方程式①の解の 1 つに対応する複素数平面上の点が C 上にあるとする。その解の偏角が 0 以上 2π 未満の範囲において最大となるときの a と b を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

（100 点）

(1) 正の実数 x に対して，$e^x>1+x$ が成り立つことを示せ。

(2) $n \geqq 1$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\log(n+1)$ が成り立つことを示せ。

(3) $k \geqq 2$ に対して，$\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{(k-1)k}$ が成り立つことを用いて，$n \geqq 2$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ は正の無限大には発散しないことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ は正の無限大に発散することを示せ。