2023 M

数　　学

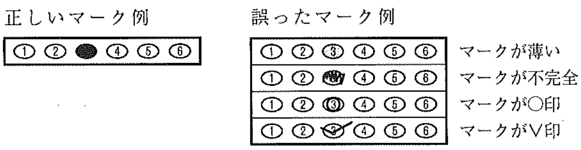
［注意事項］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

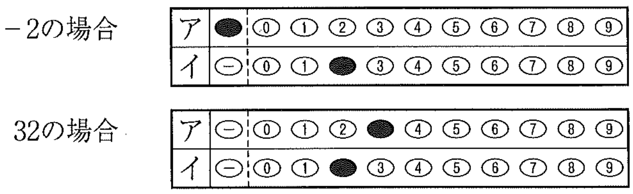
受験番号のマーク例（13015の場合）

受	験	番	号	
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HB または B の黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。



7. マークで解答する場合，$\boxed{}$ の中の文字は，それぞれ符号（－）または，数字 1 文字が対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－9 から－1 の整数または 10 から 99 の整数が入り得る。



8. 分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えること。
9. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1)

(a) 複素数 z に対して，$w = z^2$ とおく。点 z が複素数平面上の点 $\dfrac{3}{8}$ を通り，虚軸に平行な直線上を動くとする。このとき，$z = \dfrac{3}{8} + yi$，$w = u + vi$ とおくと

$u = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}} - \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}} v^{\boxed{キ}}$ という関係が得られるので，点 w は複素数平面上で

実軸と点 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ で交わり，虚軸と $\pm\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}} i$ の 2 点で交わる放物線を描く。

(b) 複素数 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とおく。点 z が複素数平面上の点 $2i$ を通り，実軸に平行な直線上を動くとする。このとき，$z = x + 2i$，$w = u + vi$ とおくと $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{x^2 + \boxed{セ}}$

となり，$u^2 + \left(v + \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\right)^{\boxed{チ}} = \dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}$ という関係が得られるので，点 w は

複素数平面上で点 $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}} i$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ の円を描く。ただし，点

$\boxed{ハ}$ を除く。

(2) 座標平面上の3点A$(-1,\ -1)$，P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$について，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}$の関係があるとき，$x_1=\boxed{\text{ア}}\,x_2+\boxed{\text{イ}}$，$y_1=\boxed{\text{ウ}}\,y_2+\boxed{\text{エ}}$となる。

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}$を満たしながら点Pが曲線$\ell_1: y=x^3-3x$上を動くとき，点Qは曲線$\ell_2: y=ax^3+bx^2+cx+d$上を動く。ただし，$a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$，$c=\boxed{\text{キ}}$，$d=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$である。

このような関係があるとき，曲線ℓ_1と曲線ℓ_2は点Aを相似の中心として相似の位置にあるといい，相似比は1：2である。

曲線ℓ_1と曲線$\ell_3: y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x-\dfrac{11}{4}$が相似の位置にあるとき，3次の係数より相似比は$\boxed{\text{ス}}$：1であり，相似の中心は点B$\left(\boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソ}}\right)$である。

(3)

(a) 初項 1，公比 $-\dfrac{4}{5}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，$S_n < \dfrac{1}{2}$ を満たす n の最大値は $\boxed{\text{アイ}}$ である。ただし，$\log_{10} 2$ の小数点第 4 位までの近似値は 0.3010 である。

(b) 一般項が $a_n = \sin^n\left(\dfrac{2}{3}n\pi\right)$ である数列 $\{a_n\}$ について，

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}} + \boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$ である。

また，$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$ である。

Ⅱ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(a) 点Oを原点とする座標空間において，2点A$\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

B$\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$をとる。△OABは1辺の長さが$\boxed{ア}$の正三角形である。

tを実数として，$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$のとき平面$z = t$と辺OAは

点$\left(\boxed{イ}\,t,\ \frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}t,\ t\right)$で交わり，平面$z = t$と辺ABは

点$\left(\sqrt{\boxed{オ}},\ \frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}t,\ t\right)$で交わる。

△OABをz軸の周りに1回転して得られる立体をVとすると，立体Vと平面$z = t$は$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$のとき交わりを持ち，そのときの立体Vの平面$z = t$による切り口は半径$\frac{\sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コ}}t$と$\sqrt{\boxed{サ} + \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}t^2}$の同心円で囲まれた部分となる。したがって，切り口の面積は$\left(\boxed{セ} - \boxed{ソ}\,t^2\right)\pi$となり，Vの体積は

$\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}\,\pi$となることがわかる。

(b) 3点O，A，Bを通る円Cは中心が

点$\left(\frac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}},\ \boxed{ナ},\ \boxed{ニ}\right)$，半径が$\frac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}$

の円であり，$z = \sqrt{\boxed{ハ}}\,y$で表される平面上にある。円Cと平面$z = t$は$\boxed{ヒフ} \leqq t \leqq \boxed{ヘ}$のとき交点を持ち，その交点の座標は

$\left(\frac{\boxed{ホ}\sqrt{\boxed{マ}}}{\boxed{ミ}}\left(\boxed{ム} \pm \sqrt{\boxed{メ} - t^2}\right),\ \frac{\sqrt{\boxed{モ}}}{\boxed{ヤ}}t,\ t\right)$と表される。したがって，円Cとその内部からなる円板をz軸の周りに1回転して得られる立体の体積は$\frac{\boxed{ユ}}{\boxed{ヨ}}\pi^2$である。

III $P(s,\ t)$ を s と t の整式とする。

(1) $A = s^3 + 2s^2t + 3st^2 + 4t^3$ と $B = s + t$ を s の整式と考えて，A を B で割った商と余りを求めよ。

(2) $P(s,\ t) = f_n(t)s^n + f_{n-1}(t)s^{n-1} + \cdots + f_1(t)s + f_0(t)$ とおく。

ただし，$f_n(t)$，$f_{n-1}(t)$，$\cdots$，$f_0(t)$ は t の整式とし，$f_n(t) \neq 0$ とする。このとき，s，t の整式 $Q(s,\ t)$ と t の整式 $R(t)$ を使って

$$P(s,\ t) = Q(s,\ t)(s - t) + R(t)$$

と表せることを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) $P(x,\ y) = -P(y,\ x)$ であるとき，1次式 $(s - t)$ は整式 $P(s,\ t)$ の因数であることを示せ。ただし，$P(x,\ y)$ は $P(s,\ t)$ に $s = x$，$t = y$ を代入して得られる整式をあらわし，$P(y,\ x)$ は $P(s,\ t)$ に $s = y$，$t = x$ を代入して得られる整式をあらわす。

(4) 1次式 $(s - t)$ が整式 $P(s,\ t)$ の因数であることは $P(x,\ y) = -P(y,\ x)$ であることの十分条件ではないことを示せ。