

試験問題(記述式) — 数 学

(注意) 解答はすべて別紙解答用紙の定められた欄に書くこと。

1 以下の間に答えよ。

- (1) 2^{345} を 30 で割った余りはいくらか。
- (2) $a_1 = 3$, $a_n + a_{n+1} = n^2 + 2n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について, $a_{2m} - a_{2m-1}$ を m を用いて表せ。ただし, m は自然数である。
- (3) $AB = 6$, $BC = 4$, $CA = 8$ である $\triangle ABC$ の内心を I とする。また, $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC の接点を D とする。このとき, $\triangle ADI$ の面積はいくらか。

2 A, B, C, D の 4 人で, すべて種類の異なる果物 k 個を分ける。ただし, 果物をもらえない者が現れる分け方についても, 果物を 4 人で分けたと考える。このとき, 以下の問に答えよ。

(1) $k=5$ のとき, 果物の分け方は何通りあるか。

(2) $k=9$ のとき, A, B, C, D の 4 人のうち, 1 人が 0 個, 残りの 3 人は少なくとも 2 個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。

(3) $k=6$ のとき, A, B, C, D の 4 人のうち, 1 人が 0 個, 残りの 3 人は少なくとも 1 個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。

(4) A, B, C, D, E の 5 人で, すべて種類の異なる果物 k_0 個を分けるとする ($k_0 > 4$)。このとき, 5 人のうち, 1 人が 0 個, 残りの 4 人は少なくとも 1 個以上もらえる果物の分け方の総数を $\sum_{i=1}^4 a_i i^{k_0}$ と表すとする。ここで, $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ は k_0 に無関係な値で, ただ 1 通りに定まる。このとき, a_3 の値はいくらか。

3 実数 x の関数 $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + ax^3 - \frac{2a^2+a}{2}x^2 + a^2x$ (ただし, a は 0 でない実数とする) について, 以下の問に答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフは $x=a$ に関して対称であることを示せ。

(2) 関数 $f(x)$ が異なる 2 つの極大値をもち, $x=a$ で極小値をとるとする。このような a の範囲を求めよ。

問 3 (2) は正答が存在しません。

(3) a は (2) の範囲にある定数とする。関数 $f(x)$ の極大値を与える 2 つの x のうち, 小さい方を α とする。 $y=f(x)$ のグラフは点 $(\alpha, f(\alpha))$ で直線 l_1 に接しているとする。また, l_1 に平行な直線 l_2 は $y=f(x)$ のグラフにちょうど 1 点で接しているとする。曲線 $y=f(x)$ と l_1 で囲まれた部分の面積 S_1 と曲線 $y=f(x)$ と l_2 で囲まれた部分の面積 S_2 をそれぞれ求めよ。

問 3 (3) は正答が存在しません。

