

入学試験問題(2次)

数 学

令和5年2月8日

試験時間 30分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子と解答用紙を開かないこと。
- 2 この問題冊子は表紙・白紙を除き1ページである。解答用紙は表紙を含め6枚である。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- 4 解答を訂正する場合は、消しゴムできれいに消すこと。
- 5 監督員の指示に従って、問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入すること。
- 6 監督員の指示に従って、解答用紙の表紙の指定欄には受験番号と氏名を、2枚目から6枚目の指定欄には受験番号を記入すること。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙左上のホチキス留めは、外さないこと。
- 9 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号				
------	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$ (a は実数定数, 関数 $f(x)$ の定義域は実数全体, 関数 $f(x)$ は連続関数) と 3 次方程式 $x^3 - 6x^2 + ax - 7 = 0$ (a は実数定数) について考える。3 次方程式は複素数の範囲で常に 3 個の解をもつことが知られている (2 重解は重なった 2 個の解, 3 重解は重なった 3 個の解として数えるものとする)。

以下の設問に答えよ。

- 1) 3 次方程式 $x^3 - 6x^2 + ax - 7 = 0$ (a は実数定数) が $p + qi$ (p, q は実数, $q \neq 0, i^2 = -1$) を解にもつならば, $p + qi$ と共役な複素数 $p - qi$ もこの 3 次方程式の解となることを示せ。
- 2) 関数 $f(x)$ において, $f(M) > 0, f(m) < 0$ であり, $x \geq M, x \leq m$ のとき $f'(x) > 0$ となる実数 M, m ($M > 0, m < 0$) が存在することを示せ。
- 3) 3 次方程式 $x^3 - 6x^2 + ax - 7 = 0$ は少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

以下の設問 4), 5) については設問 1), 2), 3) の結果を証明なしに用いてもよい。

複素平面上において, 3 次方程式 $x^3 - 6x^2 + kx - 7 = 0$ (k は実数定数) の 3 つの解を点 A, B, C と表記するとき, 3 点 A, B, C を頂点とする三角形は, 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 ABC となる。

以下の設問 4), 5) に答えよ。

- 4) 3 次方程式 $x^3 - 6x^2 + kx - 7 = 0$ の 3 つの解のうち, 虚数解の個数が 2 となることを示せ。
- 5) 3 次方程式 $x^3 - 6x^2 + kx - 7 = 0$ における k の値と 3 つの解を求めよ。

