

入学試験問題(1次)

数 学

令和6年1月22日

9時00分—10時20分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
- 2 この問題冊子は表紙・白紙を除き10ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- 4 解答は、各設問ごとに一つだけ選び、解答用紙の所定の解答欄の該当する記号を塗りつぶすこと。
- 5 解答を訂正する場合は、消しゴムできれいに消すこと。
- 6 監督員の指示に従って、問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入し、解答用紙の指定欄に受験番号、受験番号のマーク、氏名を記入すること。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号					
------	--	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つだけ選び、解答用紙の該当する記号を塗り潰せ。

1 整式 $A : ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d は実数, $a \neq 0$) について考える。

整式 A を整式 $x^2 + x + 1$ で割ると、余りが $5x + 7$ であり、整式 A を整式 $x^2 + 1$ で割ると、余りが $2x + 3$ となる。

$a - b + c - d$ の値を求めよ。

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

2 不等式 $\log_2(x - 2) < 5.5 + \log_{0.5}(x - 4)$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

3 $N = \frac{k^2 + k + 300}{k^3 + k^2 + 2k + 2}$ (k は 0 以上の整数) について考える。

N が自然数となるときすべての k の値の和を S とする。 S の値を求めよ。

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

4 $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ のとき、 $\frac{x + x^{-1}}{2}$ の値を求めよ。

ただし、 x は実数、 $x \neq 0$ とする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

5 関数 $y = |3x + 6| + |x - 2|$ (x は実数) は $x = k$ で最小値 m をとる (k, m は実数)。

$m - k$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

6 複素数 z が $|z - 3i| = \sqrt{2}$ ($i^2 = -1$) を満たすとき、 $|z - 3|$ の最大値、最小値をそれぞれ M, m とする。

$\frac{M}{m}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

7 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき, $5x^2 + 4xy + y^2$ の最大値を M , 最小値を m とする。

$\frac{(M - m)^2}{4}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

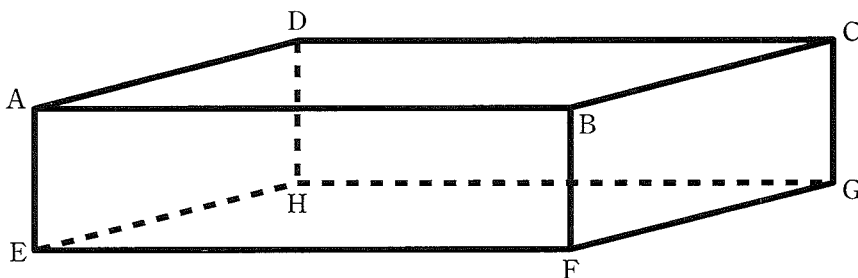
8 $\triangle ABC$ において, 辺 BC を $1 : 2$ に内分する点を P , 辺 AB を $1 : 2$ に内分する点を Q とする。

直線 AP と直線 CQ の交点を R とするとき, $\triangle ACR$ の面積は $\triangle AQR$ の面積の k 倍となる。 k の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

9 $AB = 4$, $AD = 2\sqrt{2}$, $AE = 1$ である直方体 $ABCD-EFGH$ (図を参照のこと)について考える。辺 EF の中点を M とする。

点 P が辺 GH 上を動くとき、内積 $\vec{PA} \cdot \vec{PM}$ の最小値を求めよ。



- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

10 箱の中に赤いカードが3枚、白いカードが5枚入っている。箱から1枚のカードを取り出して、色を調べてから、もとに戻す試行を続けて32回行うこととする。

赤いカードがちょうど r 回出る確率を $P(r)$ とする (r は整数, $0 \leq r \leq 32$)。

$P(r)$ が最大となる r の値を k としたとき、 $\frac{k}{3}$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

11 不等式 $\cos 3\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos \theta + 1 \geq 0$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を満たす θ の範囲は、 $a \leq \theta \leq b$, $c \leq \theta \leq d$, $e \leq \theta \leq f$ と表記される。

ただし、 $0 \leq a < b < c < d < e < f \leq 2\pi$ とする。

$\frac{c+d+e-f}{a+b}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

12 2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の異なる2つの実数解をそれぞれ α , β と表記する ($\alpha < \beta$)。 $\frac{\alpha^{10} + \beta^{10} - 3(\alpha^7 + \beta^7)}{12}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

13 x がすべての実数値をとって変化するとき、

関数 $f(x) = \frac{6x-1}{2x^2+x+2}$ について考える。

関数 $f(x)$ は $x = a$ で最小値 m , $x = \beta$ で最大値 M をとる。

$a + \beta - 5(M + m)$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

14 曲線 $C: x^2 - xy + y^2 = 4$ について考える (x, y は実数, $x \geq 0$)。

曲線 C と y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。

$\frac{2\sqrt{3}}{\pi} S$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

次の文章を読み、以下の問い(問題15~17)に対する選択肢から最も適当なものを一つだけ選べ。

半径 $3\sqrt{3}$ の球に内接する円柱の体積を V とする。この円柱の底面の円の半径を r 、高さを $2h$ とする。ただし、 r と h は実数とする。

I $r^2 = 15$ となる。

15

- | | | | |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| ㉠ $108 - 4h^2$ | ㉡ $108 - 2h^2$ | ㉢ $108 - h^2$ | ㉣ $81 - 9h^2$ |
| ㉤ $81 - 4h^2$ | ㉥ $81 - 2h^2$ | ㉦ $81 - h^2$ | ㉧ $27 - 4h^2$ |
| ㉨ $27 - 2h^2$ | ㉩ $27 - h^2$ | | |

II $V = -2\pi(16)$ となる。

16

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ㉠ $h^3 - 54h$ | ㉡ $h^3 - 48h$ | ㉢ $h^3 - 27h$ | ㉣ $h^3 - 12h$ |
| ㉤ $h^3 - 9h$ | ㉥ $h^3 - 6h$ | ㉦ $h^3 - 4h$ | ㉧ $h^3 - 3h$ |
| ㉨ $h^3 - 2h$ | ㉩ $h^3 - h$ | | |

III V は $h = k$ のとき、最大値 M をとる。

$\sqrt{\frac{M}{\pi k}}$ の値は 17 となる。

17

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

次の文章を読み、以下の問い(問題18～20)に対する選択肢から最も適当なもの
を一つだけ選べ。

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ (n は自然数) を満たす数列 $\{a_n\}$ について考える。

I 方程式 $x = \frac{4x - 9}{x - 2}$ (x は実数, $x \neq 2$) の実数解を k とする。

$k =$ 18 となる。

18

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

II I で定めた k に対して、

$\frac{1}{a_{n+1} - k} = \frac{1}{a_n - k} +$ 19 (n は自然数) が成立する。

19

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

III 数列 $\{a_n\}$ の一般項は 20 (n は自然数) となる。

20

- ア $\frac{3n-4}{n-2}$ カ $\frac{3n-5}{n-3}$ サ $\frac{3n-6}{n-4}$ タ $\frac{3n-7}{n-5}$
 チ $\frac{3n-8}{n-6}$ ハ $\frac{3n-9}{n-7}$ マ $\frac{6n-7}{2n-3}$ ヤ $\frac{6n-9}{2n-5}$
 ラ $\frac{6n-11}{2n-7}$ リ $\frac{6n-13}{2n-9}$

次の文章を読み、以下の問い(問題21~25)に対する選択肢から最も適当なものを一つだけ選べ。

関数 $f(x) = x^3 - 12x^2 - 99x - 70$ について考える。曲線 $C: y = f(x)$ に点 $P\left(\frac{35}{4}, -1280\right)$ から引いた接線のうち、接点の x 座標が曲線 C の変曲点 K の x 座標より大きい接線は2本(接線 l_1 および l_2) 存在する。ただし、変曲点 K の x 座標を t (t は実数) とする。

2本の接線を $l_1: y = m_1x + b_1$ (m_1, b_1 は実数), $l_2: y = m_2x + b_2$ (m_2, b_2 は実数) と表記する ($m_1 < m_2$)。

I 曲線 C の変曲点 K の x 座標は $t = 21$ となる。

21

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

II 2本の接線 l_1, l_2 において、

$b_1 = 22$ となる。

22

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ㉠ -11 | ㉡ -12 | ㉢ -13 | ㉣ -14 | ㉤ -15 |
| ㉥ -16 | ㉦ -17 | ㉧ -18 | ㉨ -19 | ㉩ -20 |

$b_2 = 23$ となる。

23

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| ㉠ -1280 | ㉡ -1290 | ㉢ -1300 | ㉣ -1310 | ㉤ -1320 |
| ㉥ -1330 | ㉦ -1340 | ㉧ -1350 | ㉨ -1360 | ㉩ -1370 |

Ⅲ $\left| \frac{m_1 + m_2}{24} \right|$ の値は $\boxed{24}$ となる。

$\boxed{24}$

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

Ⅳ 曲線 C の $x \geq t$ の部分と 2 本の接線 l_1, l_2 で囲まれた部分の面積を S とする。

$\sqrt{\frac{2S}{39}}$ の値は $\boxed{25}$ となる。

$\boxed{25}$

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

