

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題冊子は本文1ページ、解答用紙4枚です。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 5 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 6 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

[1] 以下の各問いに答えよ。

- (1) $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $b = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ について, $b^7 - a^7 = c\sqrt{d}$ となる 2 以上の整数 c, d を求めよ。
- (2) 自然数 n について, 3^n を 5 で割ったときの余りを r_n とする。すべての自然数 n について, 等式 $r_{n+m} = r_n$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。また, 2023^{2023} を 5 で割ったときの余りを求めよ。
- (3) 右表は, 100 人の生徒を 2 つのクラス X, Y に分けて行った試験の結果である。100 人全員の点数についての平均点が 60 点, 分散が 87 であるとき, X クラスの平均点 \bar{x} の値を求めよ。ただし, $\bar{x} < \bar{y}$ である。
- | クラス | 人数 | 平均点 | 分散 |
|-----|----|-----------|----|
| X | 60 | \bar{x} | 83 |
| Y | 40 | \bar{y} | 78 |
- (4) 関数 $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \cos 3x$ の第 50 次導関数を $f^{(50)}(x)$ とする。三角関数の合成を考へることにより, 方程式 $f^{(50)}(x) = 0$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における解をすべて求めよ。

[2] a, b は実数の定数とする。 x の多項式 $f(x) = ax^4 - (a+1)bx^3 + (a^2 + b^2 + 1)x^2 - (a+1)bx + a$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $a = \alpha\beta$, $b = \alpha + \beta$ を満たす複素数 α, β を a, b で表せ。
- (2) (1)の α, β について, $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ の値を求めよ。
- (3) 0 でない複素数 z が $f(z) = 0$ を満たすとき, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ の値を求めよ。
- (4) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 4 つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ。

[3] 辺 OA, OB, AB の長さがそれぞれ 6, 5, 4 である $\triangle OAB$ がある。辺 AB を $t : (1-t)$ に内分する点 P から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を Q とする。ただし, $0 < t < 1$ である。また, 点 P から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする。 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ として, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \angle AOB$ について, $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) \vec{OQ} と \vec{OR} をそれぞれ t, \vec{a}, \vec{b} で表せ。
- (3) $\triangle APQ$ の面積と $\triangle BPR$ の面積の和を $S(t)$ とする。 $0 < t < 1$ における $S(t)$ の最小値を求めよ。

[4] 関数 $f(x) = (x+3)\sqrt{2-x}$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減, 極値, グラフの凹凸を調べ, そのグラフを描け。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = f(-x)$ を解け。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

