

(令 5 前)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

**注意** 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点



















1. 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \leq 1) \\ 2x - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

で定める.  $a$  を実数とし, 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) すべての実数  $x$  について  $f(x) \geq x$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $a \leq 1$  のとき, すべての正の整数  $n$  について  $a_n \leq 1$  が成り立つことを示せ.
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を  $n$  と  $a$  を用いて表せ.

2.  $a, b$  を実数とする. 整式  $f(x)$  を  $f(x) = x^2 + ax + b$  で定める.  
以下の問に答えよ. ただし, 2次方程式の重解は2つと数える.  
(配点30点)

- (1) 2次方程式  $f(x) = 0$  が異なる2つの正の解をもつための  $a$  と  $b$  がみたすべき必要十分条件を求めよ.
- (2) 2次方程式  $f(x) = 0$  の2つの解の実部が共に0より小さくなるような点  $(a, b)$  の存在する範囲を  $ab$  平面上に図示せよ.
- (3) 2次方程式  $f(x) = 0$  の2つの解の実部が共に  $-1$  より大きく, 0より小さくなるような点  $(a, b)$  の存在する範囲を  $ab$  平面上に図示せよ.

3.  $n$  を 2 以上の整数とする. 袋の中には 1 から  $2n$  までの整数が 1 つずつ書いてある  $2n$  枚のカードが入っている. 以下の問に答えよ.

(配点 30 点)

- (1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき, そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ.
- (2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき, そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ.
- (3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき, そのカードに書かれている数の和が  $2n + 1$  以上である確率を求めよ.

4. 四面体 OABC があり, 辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ  $\sqrt{13}$ , 5, 5 である.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ ,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -11$  とする. 頂点 O から  $\triangle ABC$  を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) 線分 AB の長さを求めよ.

(2) 実数  $s, t$  を  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$  をみたすように定めるとき,  $s$  と  $t$  の値を求めよ.

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ.

## 5. 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を  $C$  とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1)  $\frac{dx}{dt} = 0$  または  $\frac{dy}{dt} = 0$  となる  $t$  の値を求めよ。
- (2)  $C$  の概形を  $xy$  平面上に描け。
- (3)  $C$  の  $y \leq 0$  の部分と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ。





















